Γραφική παράσταση Συνάρτησης

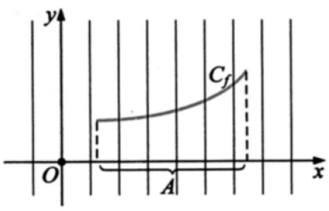
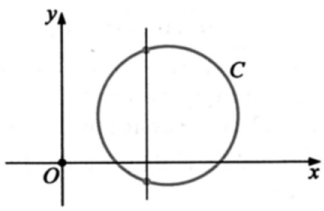
Έστω μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων.
Γραφική παράσταση της f λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ (διατεταγμένα ζεύγη) του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $y = f(x)$.
Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται με C_f.
Δηλαδή: $C_f = \{M(x,y): y = f(x), \forall x \in A\}$ ή $C_f = \{M(x, f(x), \forall x \in A\}$

■ Η εξίσωση $y = f(x)$ ονομάζεται εξίσωση της C_f και προφανώς επαληθεύεται μόνο από τις συντεταγμένες (x,y) των σημείων της C_f.

Δηλαδή: $M(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$

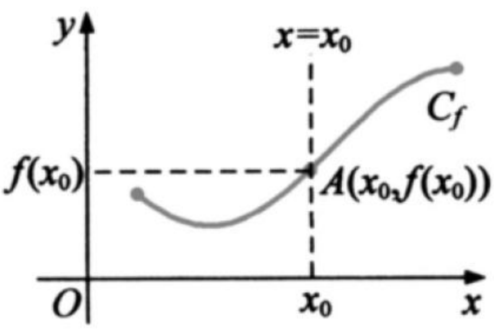
Παρατηρήσεις – σχόλια:

- Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη. Κατά συνέπεια κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την C_f

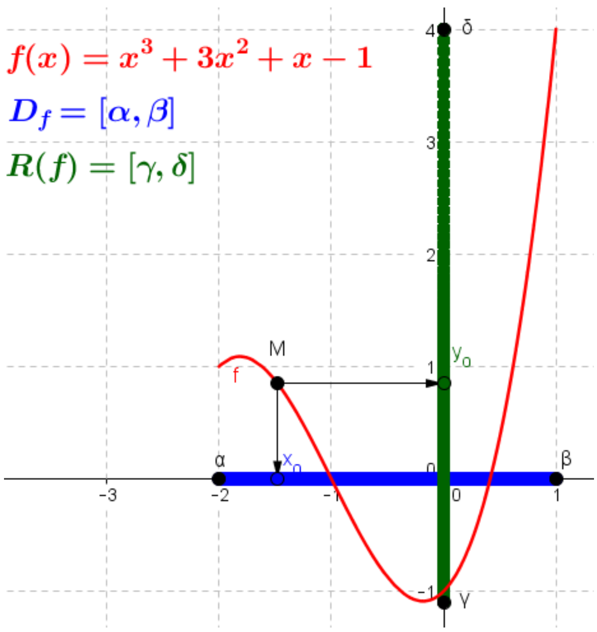
	
είναι συνάρτηση	ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση

Όταν δίνεται η C_f:

- Η τιμή της f στο x_0 είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f.

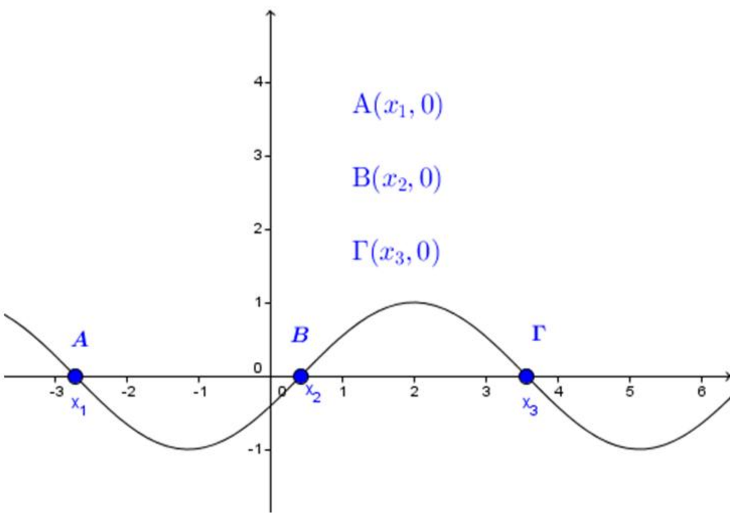


- Το πεδίο ορισμού της f είναι η ορθή προβολή της C_f πάνω στον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f.
- Το σύνολο τιμών της f είναι η ορθή προβολή της C_f πάνω στον άξονα $y'y$, δηλαδή είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f.



Σημεία τομής με τους άξονες:

- Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον άξονα $x'x$.

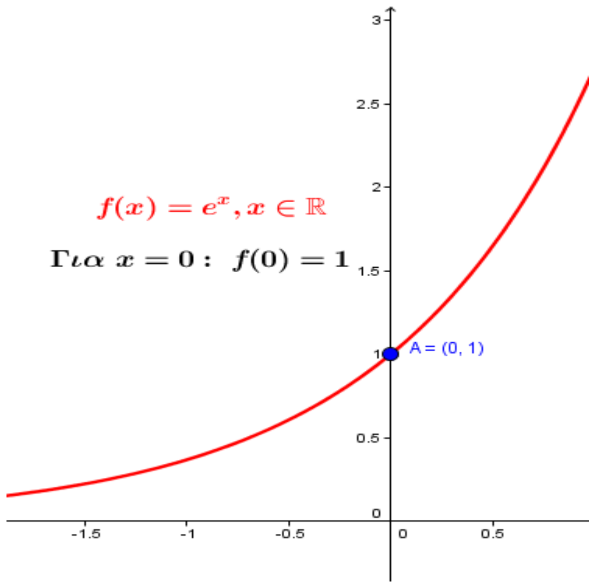


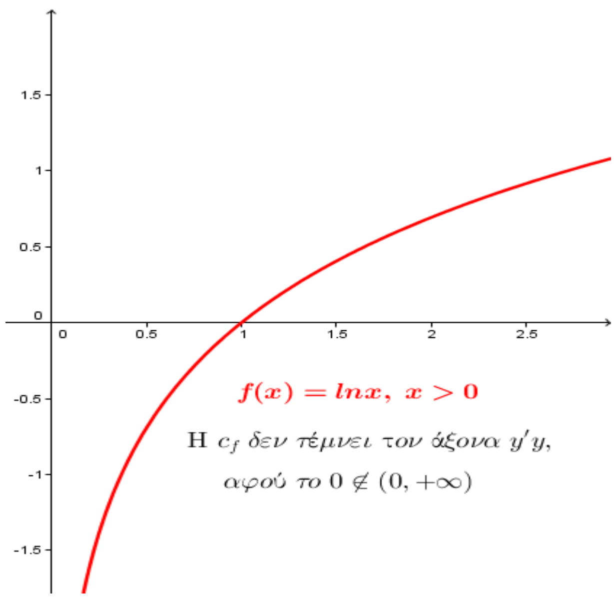
Σχόλιο:

Στην περίπτωση που η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη, η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$.

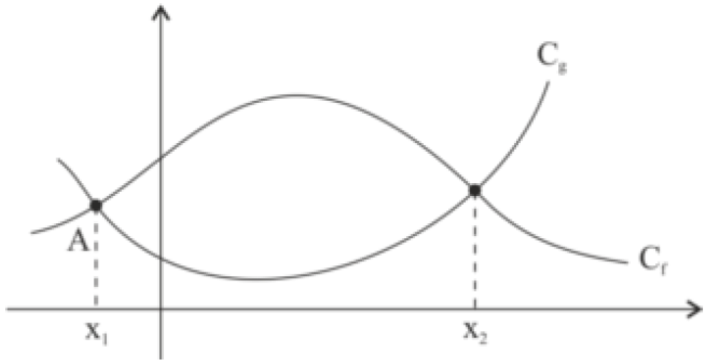
- Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ (αν υπάρχει) θέτουμε $x=0$ (εφόσον το $0\in A_f$) στην εξίσωση της C_f, οπότε το σημείο είναι το $(0, f(0))$



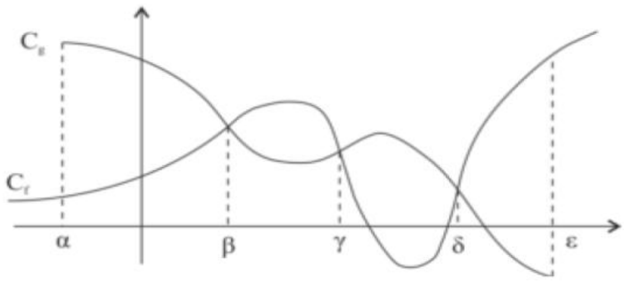


- Από την επίλυση της ανισότητας $f(x)>0$ βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. ενώ η ανισότητα $f(x)<0$ μας καθορίζει τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

- Αν $y=f(x)$ και $y=g(x)$ δύο συναρτήσεις και C_f, C_g οι γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα, τότε οι λύσεις (αν υπάρχουν) της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g.



- Από την επίλυση της ανισότητας $f(x)>g(x)$ βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g., ενώ η ανισότητα $f(x)<g(x)$ μας καθορίζει τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g.



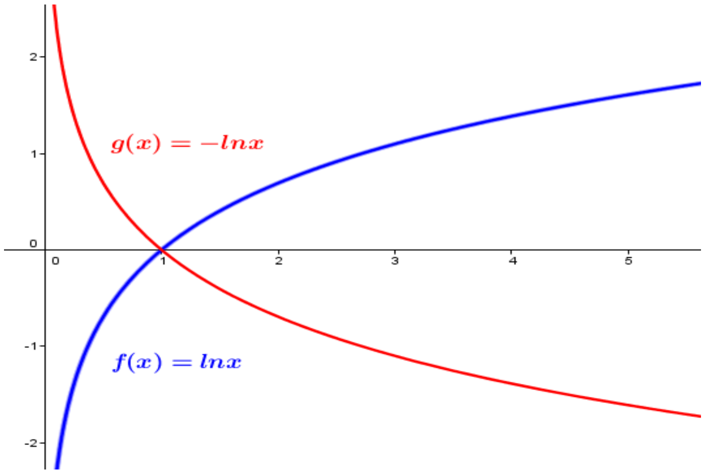
- $g>f$ στο $[\alpha,\beta)\cup(\gamma,\delta)$
- $f>g$ στο $(\beta,\gamma)\cup(\delta,\epsilon]$
- $D_f \cap D_g = [\alpha,\epsilon]$

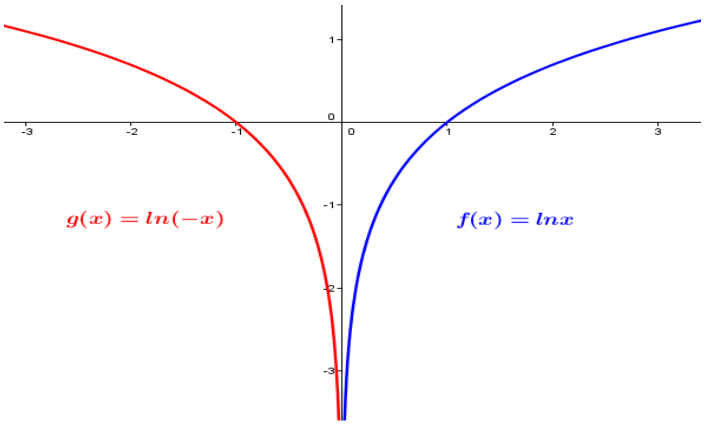
Συμμετρίες – Μετατοπίσεις

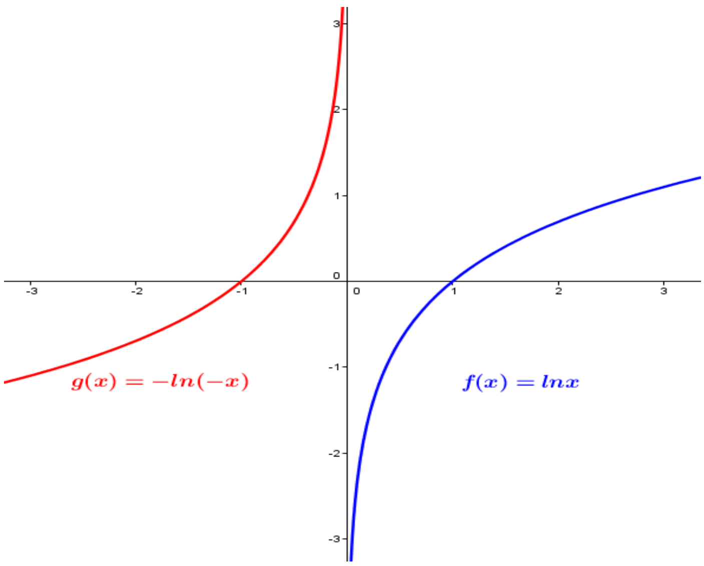
Όταν είναι γνωστή η C_f:

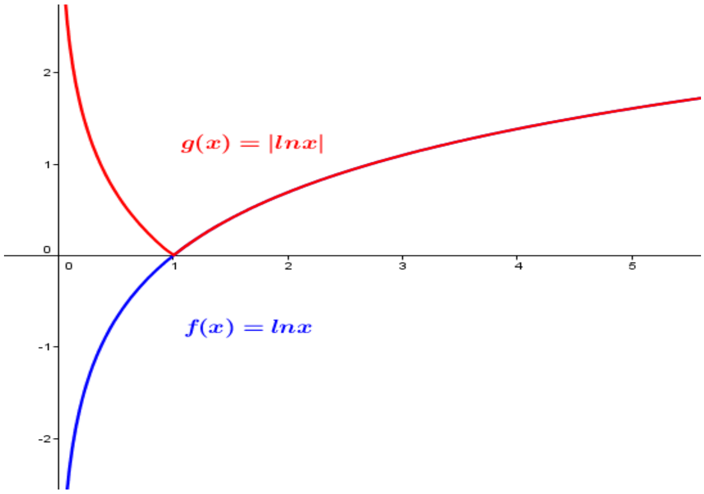
- Η γραφική παράσταση της $-f$ είναι συμμετρική με την C_f ως προς τον άξονα $x'x$.
- Η γραφική παράσταση της $f(-x)$ είναι συμμετρική με την C_f ως προς τον άξονα $y'y$.
- Η γραφική παράσταση της $-f(-x)$ είναι συμμετρική με την C_f ως προς την αρχή $O(0,0)$.

- Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$ καθώς και από τα συμμετρικά, ως προς τον $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$.





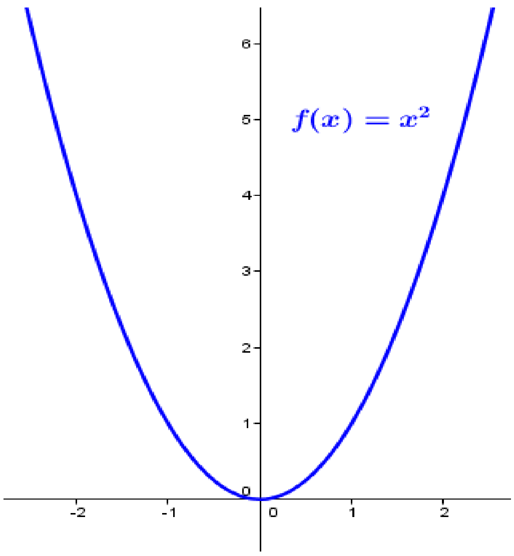


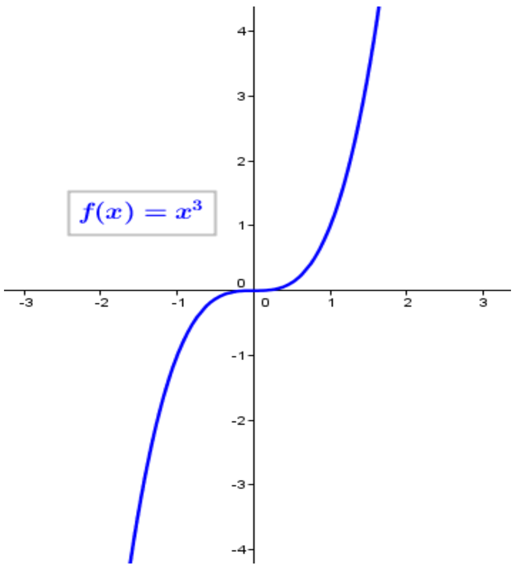


Θυμάμαι ότι:

▪ Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

▪ Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.





- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+k,\ k\in\mathbb{R}^*$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά k μονάδες προς τα πάνω (αν $k>0$) ή προς τα κάτω (αν $k<0$).

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x+k),\ k\in\mathbb{R}^*$ προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά k μονάδες προς τα δεξιά (αν $k<0$) ή προς τα αριστερά (αν $k>0$).