Συναρτήσεις 1-1

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(g\circ f)(x)=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(4^x-2^{x+1}+4\right)=f\left(2^{x+2}-4\right)$.

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{1}{2015^x}-2016x$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\dfrac{1}{2015}\right)^{x^2-9}-2016\left(x^2-9\right)=\left(\dfrac{1}{2015}\right)^{x+3}-2016x-6048$.

Άσκηση 3

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f\left(f(x)\right)+\left(f(x)\right)^3=2x+\ln 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(2x^3+x\right)-f\left(4-x\right)=0$.

Άσκηση 4

Έστω μια συνάρτηση f με $D_f=\mathbb{R}$ και $f\left(D_f\right)=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f\left(f(x)\right)=x^2-x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(1)=1$

ii. Η συνάρτηση $g(x)=x^2-xf(x)+1,\ x\in\mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

Άσκηση 5

Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g^2\left(x^2\right)+9\le 6g(2x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1-1.

Άσκηση 6

Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g^2(x)\le g(x)g(2015-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1-1.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln\left(x^2+1\right)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ (Εξετάσεις 2010)

Άσκηση 8

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

(1): $2g(x)+f\left(x^3+2016\right)=g\left(g(x)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$ και (2): f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $g\left(e^x+1+x\right)=g\left(2-x^3\right)$

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(e^x+2x\right)\geq f\left(e^{-x}\right)$

Άσκηση 9

Για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $10f\left(x^2\right)-25\geq f^2\left(x\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 10

Για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(f\left(x\right)\right)=x^3-2x^2+3x-1,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το $f\left(1\right)$.

ii. Να εξετάσετε αν είναι 1-1 η συνάρτηση: $g\left(x\right)=x^3+x^2f\left(x\right)-2xf^2\left(x\right)+3.$

Άσκηση 11

Για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(f\left(x\right)\right)=2x-1,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $f\left(2x-1\right)=2f\left(x\right)-1,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση: $f\left(x\right)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 1.

Άσκηση 12

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ έχει μια μοναδική ρίζα και ισχύει:

$f\left(x\right)-f\left(y\right)=f\left(\dfrac{x}{y}\right),$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(x^2+1\right)+f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+f\left(x^2+3\right).$

Άσκηση 13

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\left(f\circ f\right)\left(x\right)=\mathrm{x},\ \forall x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g\left(x\right)=e^x+e^{f(x)},\ x\in\mathbb{R}$ που είναι 1-1.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(g\circ f\right)(x)=g(x)$

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.