Πχ5) Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+\frac{3\lambda-2}{4}=0$

α) Να βρεθεί η Δ.

β) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.

γ) Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1 να βρεθεί η τιμή το λ.

Λύση

Ασκήσεις.

1) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x^2+\lambda x+6\lambda+2=0, \lambda\in R$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει μια ακριβώς ρίζα.

2) Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda+2)x+3\lambda-2=0, \lambda\in R$.
α) Να βρεθεί η Δ
β) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα
γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε να βρεθεί η διπλή ρίζα της εξίσωσης.

3) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(2\lambda+3)x+(\lambda-1)=0, \lambda\in R$. Να εξετάσετε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$. και ποιές είναι αυτές.

4) Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha=0, \alpha\neq 0$.
α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=(\alpha^2+1)^2$
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες $\rho_1=\alpha, \rho_2=-\frac{1}{\alpha}$.
γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|\rho_1-\rho_2|=2$.
(τράπεζα θεμάτων)

5) Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+\lambda=0, \lambda<1$
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2. οι οποίες και να βρεθούν ως συνάρτηση του λ.
β) Να δείξετε $x_1+x_2=2$.
γ) Αν επιπλέον ισχύει $|x_1-2|=|x_2+2|$ τότε
i) Να δείξετε $x_1-x_2=4$
ii) Να υπολογίσετε τις ρίζες και την τιμή του λ.
(τράπεζα θεμάτων)

6) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+(2\lambda-1)x+\lambda-1=0$ με $\lambda\neq 0$
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντα δύο ρίζες άνισες
β) Να βρεθούν οι ρίζες συναρτήσει του λ
γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης στον άξονα να απέχουν απόσταση 2 μονάδες.
(τράπεζα θεμάτων)

ΜΑΘΗΜΑ 21
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ.

ΣΤΟΧΟΣ/. • Να μάθουν οι μαθητές να βρίσκουν τιμές παραμέτρων μέσω αθροίσματος και γινομένου.
• Να μάθουν να βρίσκουν την εξίσωση β' βαθμού όταν γνωρίζουν τις ρίζες

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. με $\alpha\neq 0$
Στη περίπτωση που $\Delta>0$ έχει ρίζες. τις
$x_1=$ ______ και $x_2=$ ______
τότε.

α) $x_1+x_2=$ . .

β) $x_1\cdot x_2=$ . .

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα x_1+x_2 και με P το γινόμενο $x_1\cdot x_2$ τότε έχουμε τους τύπους

$S=$ . . $\quad P=$ . . .	Τύποι Vieta

Πχ1 αν έχω την εξίσωση $2x^2-10x+1=0$
τότε $S=$ . . $\quad P=$ . . .

Πχ2 αν έχω την εξίσωση $x^2-5x+6=0$ τότε
$S=$ . . $\quad P=$ . . .

ΠΡΟΣΟΧΗ/ Αν γνωρίζω τις δύο ρίζες μια εξίσωσης β' βαθμού τότε μπορώ να βρώ την εξίσωση αφού

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

Πχ1. για την εξίσωση με ρίζες $x_1=2$, $x_2=3$ είναι

$S=x_1+x_2=\ldots \qquad P=x_1\cdot x_2=\ldots$

άρα η εξίσωση είναι ......

Πχ2 για την εξίσωση με ρίζες $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{-5}{4}$ είναι

$S=x_1+x_2=\ldots \qquad P=x_1\cdot x_2=\ldots$

άρα η εξίσωση είναι ......

Πχ1.

$\boxed{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ ΤΥΠΟΙ}}$ Αν $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ τότε $A=\ldots$

$S=x_1+x_2=\ldots \qquad P=x_1\cdot x_2=\ldots$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\ldots$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2\cdot(x_1+x_2)=\ldots$

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\ldots$

Πχ2 Δίνεται η εξίσωση $x^2+(2\lambda+4)x+(\kappa+\lambda)=0$ με ρίζες $x_1=2$, $x_2=6$. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων λ, κ.

Λύση.

Είναι $S=2+6=8$, $P=2\cdot 6=12$

Είναι $S=-\frac{\beta}{\alpha}=\ldots$, $P=\text{—}=\ldots$

<u>Πρέπει.</u> ...... και ......

Πχ3 Δίνεται η εξίσωση $x^2-5\lambda x-1=0$, $\lambda \in R$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντα δύο ρίζες άνισες

β) Να υπολογίσετε $S=x_1+x_2$, $P=x_1 \cdot x_2$ συναρτήσει του λ

γ) Αν $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1 \cdot x_2)^{24}=0$ να βρεθεί η τιμή του λ

δ) για $\lambda=1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης
$A=x_1^2 \cdot x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2$

(τράπεζα, θεμάτων)

Λύση:

α)

β)

γ)

δ)

Ασκήσεις

1) Αν η εξίσωση $x^2-(\alpha+4)x+(2\alpha+\beta)=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 3, 4 να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α, β.

2) Να βρεθούν οι εξισώσεις με ρίζες
   α) $x_1=4$, $x_2=6$.
   β) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{3}$
   γ) $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

3) Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x-1=0$ με ρίζες x_1, x_2. Να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες.
$\rho_1=x_1^2+x_2^2$, $\rho_2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$

4) Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
   α) Να βρείτε την διακρίνουσα
   β) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντα δύο ρίζες άνισες
   γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε $(x_1-2)(x_2-2)=-4$. (Τράπεζα θεμάτων)

5) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda=0$, $\lambda\neq 0$
   α) Να βρείτε την διακρίνουσα και να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντα ρίζες άνισες.
   β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες να υπολογ. $S=x_1+x_2$, $P=x_1\cdot x_2$ συναρτήσει του λ
   γ) αν $\lambda<0$ i) Να εξετάσετε αν οι ρίζες είναι θετικές ή αρνητικές
   ii) Να δείξετε $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2$

(Τράπεζα θεμάτων)

ΜΑΘΗΜΑ 22
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ

ΣΤΟΧΟΣ: • Να θυμηθούν οι μαθητές πώς λύνονται οι ανισώσεις α' βαθμού
• να μάθουν να λύνουν ανισώσεις με απόλυτα
• να μάθουν να συναληθεύουν ανισώσεις

• Να λυθούν οι ανισώσεις

$2x < 6 \Leftrightarrow$

$-2x < 6 \Leftrightarrow$

$0x < 6 \Leftrightarrow$

$0x > 6 \Leftrightarrow$

$0x < 0 \Leftrightarrow$

$0x > 0 \Leftrightarrow$

• Άρα αν έχω μια ανίσωση της μορφής $\alpha x < \beta$.

i) αν $\alpha > 0$ τότε είναι $x \ldots \beta/\alpha$

ii) αν $\alpha < 0$ τότε είναι $x \ldots \beta/\alpha$

iii) αν $\alpha = 0$ τότε η ανίσωση γίνεται $0x < \beta$ που αληθεύει αν $\beta \ldots 0$
που είναι αδύνατη αν $\beta \ldots 0$

• πχ1 Να λυθεί η ανίσωση

$2\cdot(x-4) - 4(3-x) < 4x - 6 \Leftrightarrow$

$\ldots \Leftrightarrow$

$\ldots \Leftrightarrow$

$\ldots \Leftrightarrow$

• πχ2 $\frac{x}{4} - \frac{x}{2} < 6 \Leftrightarrow$ (κάνω απαλοιφή παρονομαστών)

$4\cdot\frac{x}{4} - 4\cdot\frac{x}{2} < 4\cdot 6 \Leftrightarrow x - 2x < 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow$

• Κοινές λύσεις ανισώσεων

α) $x > 4$ και $x < 6$ άρα $4 < x < 6$

ή $x \in (4, 6)$

β) $x \geq 4$ και $x \leq 6$ άρα $4 \leq x \leq 6$

ή $x \in [4, 6]$

γ) $x < 4$ και $x < 6$ . . . .

δ) $x > 4$ και $x \geq 6$ . . . .

ε) $x < 4$ και $x > 6$ . . . .

• Πχ1 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

$2(x+4) - (x+6) < 12 - x$ και $2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1+x)$

$x < 5$ και $x \geq 2$

άρα ________ άρα . . . .

ή . . . .

• ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ.

α) $|x| < \theta$ (όπου θ θετικός) $\Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

β) $|x| > \theta$ (όπου θ θετικός) $\Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

Πχ1 $|x| < 6 \Leftrightarrow$ . . . ή $x \in$

Πχ2 $|x| > 6 \Leftrightarrow$ . . . ή $x \in$

Πχ3 $|2x - 6| < 4 \Leftrightarrow$

Πχ4 $|2x - 6| \geq 4 \Leftrightarrow$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) α) Να λυθούν οι ανισώσεις
$$2(x-4)-4(x+3)<6 \quad \text{και} \quad 6(x-2)-2(x-4)<8$$
β) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων

(2) α) Να λυθούν οι ανισώσεις
$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2 \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{4}-\frac{x+2}{2}<6.$$
β) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

(3) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $|2x-4|\leq 6$ β) $|2x-6|\geq 2$.
γ) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

4) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $\frac{|x-1|-4}{2}+\frac{5}{3}<\frac{|x-1|}{3}$ β) $\frac{|x|+1}{2}-\frac{2|x|}{3}>\frac{1-|x|}{3}$
γ) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

4) Να λυθεί η ανίσωση $2<2x-6\leq 6$.
5) Να λυθεί η ανίσωση $2\leq|2x-4|\leq 6$

6) Θυμάμαι ότι αν $|x|=x$ τότε $x\geq 0$
αν $|x|=-x$ τότε $x\leq 0$
Με εφαρμογή του παραπάνω να λυθούν οι εξισώσεις
α) $|2x-6|=2x-6$.
β) $|2x-4|=-(2x-4)$.

7) Να λυθεί η ανίσωση
$$\frac{2|x-2|-6}{2}<\frac{|2-x|}{2}-\frac{|2x-4|}{4}$$

ΜΑΘΗΜΑ 23.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ – ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

ΣΤΟΧΟΣ/ • Να παραγοντοποιούν το τριώνυμο.
• Να βρίσκουν το πρόσημο τριωνύμου.

• Έστω το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$

α) Αν $\Delta > 0$ τότε γνωρίζω ότι έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 στην περίπτωση αυτή είναι $f(x) = \alpha(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

β) Αν $\Delta = 0$ τότε γνωρίζω ότι έχει μια διπλή ρίζα ρ στην περίπτωση αυτή είναι $f(x) = \alpha(x-\rho)(x-\rho) = \alpha(x-\rho)^2$.

γ) Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

Πχ1 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2 = 3\cdot(\quad)\cdot(\quad)$.
έχει $\Delta =$
και $x_{1,2} =$

Πχ2 $f(x) = x^2 - 5x + 6 = \ldots$
έχει $\Delta =$
και $x_{1,2} =$

Πχ3 $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (\quad)^2$ ταυτότητα:
$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (\quad)^2$ ταυτότητα
ή $f(x) = 4x^2 - 4x + 1 = 4\cdot(\quad)^2$
$\Delta =$
και $\rho =$

Πχ4 $f(x) = 4x^2 - 4$
Πχ5 $f(x) = 4x^2 - 12x$
Πχ6 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 5x + 2} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

αφού $x^2 - 3x + 2 = 2(\quad)\cdot(\quad)$
$x^2 - 5x + 6 = 3(\quad)\cdot(\quad)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ Αν έχω τριώνυμο της μορφής

$f(x) = x^2 + (x_1+x_2)x + x_1 \cdot x_2$ τότε.

$f(x) = x^2 + x_1 x + x_2 x + x_1 x_2$

$f(x) = x(x+x_1) + x_2(x+x_1)$.

$f(x) = (x+x_1)(x+x_2)$.

$f(x) = x^2+5x+6 = x^2+(3+2)x+3\cdot 2 = (x+3)(x+2)$

$f(x) = x^2-5x+6 = x^2+(-3-2)x+(-3)\cdot(-2) = (x-3)(x-2)$

$f(x) = x^2+7x+12 =$

$f(x) = x^2-7x+12 =$

$f(x) = x^2-x-12 =$

$f(x) = x^2+x-12 =$

$f(x) = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x+2} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

· ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

α) Αν $\Delta>0$ και το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2, τότε $f(x) = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$. οπότε.

Θ είναι

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		. . .	0	. . .	0	. . .	

i) αν $x < x_1 < x_2$ και x → $x-x_1<0$, $x-x_2<0$ $\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2) \ . . \ 0$

άρα $\alpha\cdot(x-x_1)(x-x_2)$ έχει ... πρόσημο με το α

ii) αν $x > x_2 > x_1$ → $x-x_1 \ . . . \ 0$, $x-x_2 \ . . \ 0$ $\Rightarrow (x-x_1)\cdot(x-x_2) \ . . \ 0$

άρα $\alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ έχει ... πρόσημο με το α

iii) αν $x_1 < x < x_2$ → $x-x_1 \ . . \ 0$, $x-x_2 \ . . \ 0$ $\Rightarrow (x-x_1)\cdot(x-x_2) \ . . . \ 0$

άρα $\alpha(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ έχει .... πρόσημο από το α

β) αν $\Delta = 0$ τοτε $f(x) = \alpha(x-\rho)^2$ και αφού το $(x-\rho)^2 \geq 0$ και είναι ίσο με το 0 οταν $x=\rho$, τοτε. $\alpha(x-\rho)^2 \geq 0$ αν α . . 0 είναι . . . του α.
$\alpha(x-\rho)^2 \leq 0$ αν α . . 0 είναι . . . του α.

οπότε

x		ρ	
$f(x)$	. . .	ϕ	. . .

γ) Αν $\Delta < 0$ τοτε ισχύει οτι το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του α.

Πχ1. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

$\Delta =$

$x_{1,2} =$

x					
$f(x)$		ϕ		ϕ	

Πχ2. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = -3x^2 + 7x - 4$.

$\Delta =$

$x_{1,2} =$

x					
$f(x)$		ϕ		ϕ	

Πχ3. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

είναι $f(x) = (\quad)^2$.

x	
$f(x)$	

Πχ4. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

είναι $f(x) = -(x^2 - 4x + 4) = -(\quad)^2$. άρα

x	
$f(x)$	

Πχ5. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = x^2 - 2x + 6$.

x	
$f(x)$	

Πχ6. Να βρεθεί το πόσημο του $f(x) = -x^2 + 2x - 8$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) i) Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα.
α) $5x^2-2x-3$ β) $4x^2-7x+3$.
ii) Να απλοποιηθεί η παράσταση.
$A=\frac{5x^2-2x-3}{4x^2-7x+3}$.

2) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις
$A=\frac{3x^2-5x+2}{2x^2-5x+3}$ $\Gamma=\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$.
$B=\frac{x^2-7x+12}{x^2-16}$. $\Delta=\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

3) Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα (χωρίς βοήθ. Δ)
$x^2-7x+10=$
$x^2+7x+10=$
$x^2-7x-10=$
$x^2+7x-10=$.

4) Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων
α) $f(x)=x^2-7x+10$. γ) $f(x)=5x^2-4x+1$
β) $f(x)=-x^2+8x-12$. δ) $f(x)=-2x^2-6x+8$

5) Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων
α) $f(x)=4x^2-4x+1$. γ) $f(x)=x^2-10x+25$
β) $f(x)=-4x^2+4x-1$ δ) $f(x)=-x^2+6x-9$

6) Να βρεθεί το πρόσημο των παραστάσεων
α) $f(x)=3x^2-2x+5$ γ) $f(x)=3x^2+5$
β) $f(x)=-x^2+x-6$ δ) $f(x)=-4x^2-2$

7) Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου.
$f(x)=\lambda x^2-(2\lambda)x+(\lambda+\frac{2}{\lambda})$, $\lambda\neq0$

ΜΑΘΗΜΑ 24.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ.

ΣΤΟΧΟΣ:
- Να λύνουν οι μαθητές ανισώσεις β' βαθμού χρησιμοποιώντας το πρόσημο τριωνύμου.
- Να λύνουν παραμετρικές εξισώσεις β' βαθμού
- Να λύνουν παραμετρικές ανισώσεις β' βαθμού

Πχ1. Να λυθεί η ανίσωση $x^2-3x+2<0$.

Δ =

$x_{1,2}$ =

άρα $x \in$ . . .

x			
x^2-3x+2		0	0

Πχ2 Να λυθούν οι ανισώσεις.

α) $x^2-5x+6<0$ β) $x^2-5x+6\le 0$ γ) $x^2-5x+6>0$ δ) $x^2-5x+6\ge 0$

Δ =

$x_{1,2}$ =

x			
x^2-5x+6		0	0

α) $x \in$ β) $x \in$ γ) $x \in$ δ) $x \in$

Πχ3 Να λυθεί η ανίσωση α) $x^2<4$ β) $x^2\ge 4$

α) είναι $x^2<4 \Leftrightarrow x^2-4<0$

$x \in$.

β) $x \in$

x			
x^2-4		0	0

Πχ4 Να λυθούν οι ανισώσεις.

α) $x^2-4x+4>0$ β) $x^2-4x+4\ge 0$ γ) $x^2-4x+4<0$ δ) $x^2-2x+4\le 0$

είναι $x^2-4x+4=(\quad)^2$ άρα

x		
x^2-4x+4		0

α) $x \in$

β) $x \in$

γ) $x \in$

δ) $x \in$

• ΚΟΙΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

(Πx) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων
$x^2 - x - 12 \le 0$ και $1 - x^2 \le 0$

x			
x^2-x-12		0	0

$\Delta =$

$x_{1,2} =$

$x \in$

x			
$1-x^2$		0	0

$x \in$

κοινές λύσεις $-\infty$ $+\infty$

άρα $x \in$.

• ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

(Πx) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 3/4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθεί η Δ ως συνάρτηση του λ.

β) Να βρεθεί το πρόσημο της Δ.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

δ) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση να μην έχει πραγματικές ρίζες.

ΛΥΣΗ.

α) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda - 3/4) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$.

β) Πρόσημο της $\Delta = \lambda^2 - 4\lambda + 3$

λ			
$\lambda^2-4\lambda+3$		0	0

γ) πρέπει Δ .. 0 $\Leftrightarrow \lambda \in$

δ) πρέπει Δ .. 0 $\Leftrightarrow \lambda \in$.

• ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

(1) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda$, $\lambda\neq-2$

α) Να βρεθεί η Δ ως συνάρτηση του λ

β) Να βρεθεί το πρόσημο της Διακρίνουσας

γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ανίσωση $(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda>0$ να αληθεύει για κάθε $x\in R$, με $(\lambda\neq-2)$

δ) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ανίσωση $(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda<0$, $(\lambda\neq-2)$ να αληθεύει για κάθε $x\in R$

ΛΥΣΗ

α) $\Delta=(-2\lambda)^2-4\cdot(\lambda+2)\cdot3\lambda=4\lambda^2-12\lambda^2-24\lambda=-8\lambda^2-24\lambda=-8\lambda(\lambda+3)$

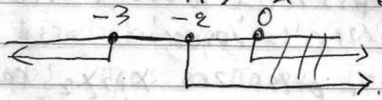
β)

λ		-3		0	
$-8\lambda(\lambda+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

γ) Πρέπει ταυτόχρονα το $\lambda+2>0$ και $\Delta<0$.

$\lambda>-2$ και $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$

συναλήθευση



άρα $\lambda\in(0,+\infty)$.

δ) Πρέπει ταυτόχρονα το $\lambda+2$ .. 0 και Δ .. 0

λ .. 0 και $\lambda\in$

συναλήθευση

άρα $\lambda\in$

(2) Για ποιές τιμές του $\lambda\in R$ η ανίσωση $x^2+\lambda x+\lambda>0$ αληθεύει για κάθε τιμή του $x\in R$.

Λύση

$\Delta=$

πρέπει Δ . . 0

άρα $\lambda\in$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $x^2-7x+12>0$, β) $x^2-7x+12\geq 0$, γ) $x^2-7x+12<0$ δ) $x^2-7x+12\leq 0$

2) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $x^2-6x+9>0$, β) $x^2-6x+9\geq 0$ γ) $x^2-6x+9<0$ δ) $x^2-7x+12\leq 0$

3) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $x^2-2x+5>0$, β) $x^2-2x+5\geq 0$, γ) $x^2-2x+5<0$, δ) $x^2-2x+5\leq 0$

4) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $x^2<4$ β) $x^2\geq 9$ γ) $x^2>2x$ δ) $x^2\leq 3x$

5) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων
$x^2\leq 7x-10$ και $x(x-2)\geq 4x-8$.

6) Να λυθεί η ανίσωση
$2x-1\leq x^2-4\leq 12$.

7) Δίνεται η εξίσωση $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$, $\lambda\in R$
α) Να δείξεις ότι $\Delta=4(\lambda^2-3\lambda-4)$
β) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες
γ) Αν η εξίσωση έχει ρίζες τις x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 πάνω στον άξονα $x'x$ να βρεθεί το λ ώστε $d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$
(Τράπεζα θεμάτων)

8) Δίνεται το τριώνυμο $\cancel{f(x)=}x^2-6x+\lambda-3$, $\lambda\in R$
α) Να βρεθεί η διακρίνουσα
β) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε το τριώνυμο να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες
γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ανίσωση $x^2-6x+\lambda-3>0$ να αληθεύει για κάθε $x\in R$.
δ) Αν $3<\lambda<12$ i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες θετικές άνισες
ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ οι άνισες ρίζες του τριωνύμου και κ, μ δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $A=\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$
(Τράπεζα θεμάτων)

(10) α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x-\frac{1}{2}|>1$

γ) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $\alpha, \alpha+1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha-\frac{1}{2}|>1$

Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$

i) Να δείξετε $\frac{3}{2}<\alpha<2$

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος

(τράπεζα θεμάτων)

(11) Δίνεται ο αριθμός α που ικανοποιεί την εξίσωση $|\alpha-2|<1$

α) Να λυθεί η εξίσωση

β) Θεωρούμε το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$

i) Να βρεθεί η Διακρίνουσα και το πρόσημο της Διακρ.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$$

(τράπεζα θεμάτων)

(12) Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος προς τα πάνω. Το ύψος y (σε m) το οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (sec) μετά την εκτόξευση δίνεται από την σχέση $y=60t-5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος

β) Ποιές χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος 175 m από το έδαφος

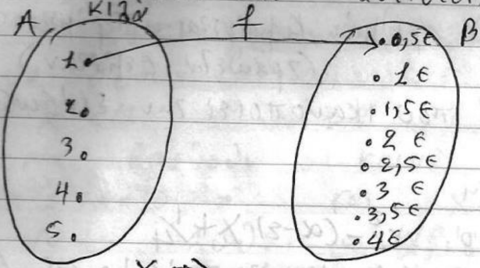
γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος $h>100$ m.

ΜΑΘΗΜΑ 25

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – Π. ΟΡΙΣΜΟΥ

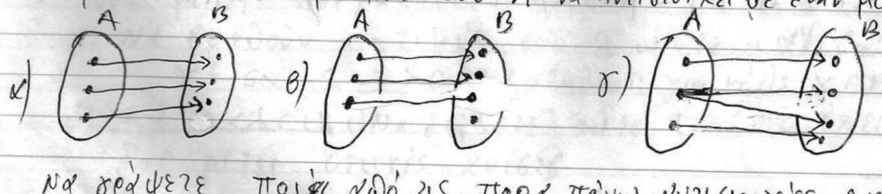
ΣΤΟΧΟΣ:
- Να γνωρίζουν αν μια αντιστοιχία είναι συνάρτηση
- Να βρίσκουν την τιμή της συνάρτησης.
- Να βρίσκουν το π. ορισμού συνάρτησης.

• Η μητέρα σας πηγαίνει στη λαική και θέλει να αγοράσει πατάτες που έχουν 0,5 € το κιλό.
Να κάνετε την αντιστοιχιση.



Η παρα πάνω αντιστοιχιση στα μαθηματικά ονομάζεται συνάρτηση και συμβολίζεται $f: A \to B$.
Το Σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ λέγεται π. ορισμού της συναρ.
Το Σύνολο $f(A) = \{0{,}5,\ 1,\ 1{,}5,\ 2,\ 2{,}5\}$ λέγεται Συνολο Τιμών της συνάρτησης
Η διαδικασία f με την οποία κάθε αριθμός x του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε έναν αριθμό y του συνόλου B. λέγεται Τύπος της συνάρτησης. Εδώ είναι $f: x \to 0{,}5 \cdot x$ ή $y = 0{,}5 \cdot x$ ή $f(x) = 0{,}5 \cdot x$

ΠΡΟΣΟΧΗ Για να είναι συνάρτηση μια αντιστοιχία. Πρέπει κάθε αριθμός του A να αντιστοιχεί σε έναν μόνο το B



Να γράψετε ποιές από τις παρα πάνω αντιστοιχίες είναι συναρ.
α) . . . και f(A)..B β) . . και f(A)..B γ) . . . .

• ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πχ1 Δίνεται μια συνάρτηση f με Π.ορ. $A=\{0,2,4,6,8\}$.
Και τύπο $f(x)=10\cdot x+4$

Τότε $f(0)=10\cdot 0+4=0+4=4$ | $f(6)=$
$f(2)=10\cdot 2+4=20+4=24$ | $f(8)=$
$f(4)=$ | $f(1)=$?

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι
$f(A)=\{\quad\}$.

Πχ2
Δίνεται μια συνάρτηση f με Π.ορ $A=\{-2,-1,0,1,2\}$
και τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x\leq 0 \\ x^3 & \text{αν } x>0 \end{cases}$. τότε είναι

$f(-2)=$
$f(-1)=$
$f(0)=$
$f(1)=$
$f(2)=$

Σύνολο Τιμών είναι
$f(A)=\{\quad\}$.

• ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ.

Όταν δίνεται μόνο ο τύπος μιας συνάρτησης και όχι το Π. ορισμού τότε θεωρούμε ως Π.ορισμού το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση δηλαδή κάνω περιορισμούς

α) όταν έχω παρονομαστή πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός από το 0.

β) όταν έχω ρίζα πρέπει το υπόριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μηδέν

Πχ1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$
Για να ορίζεται το κλάσμα πρέπει να είναι
$x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ άρα Π.ορισμού είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός του 2 και γράφω.
Π. ορισμού της f είναι το $A=R-\{2\}$.

(Πχ2) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2-9}$

πρέπει $x^2-9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq ..$ και $x \neq ...$

άρα Π.Ορ. της f είναι $A =$

(Πχ3) $f(x) = \sqrt{x-2}$

πρέπει $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ άρα Π.ορ. $A=[3,+\infty)$

(Πχ4) $f(x) = \sqrt{2x-6}$.

πρέπει . . . . άρα Π.ορ $A=$

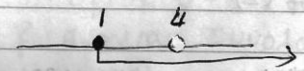
(Πχ5) $f(x) = \sqrt{8-2x}$

πρέπει . . . . άρα Π.ορ $A=$

(Πχ6) $f(x) = \frac{4x+\sqrt{x-1}}{x-4}$

πρέπει $x-1 \geq 0$ και $x-4 \neq 0$.

$x \geq 1$ και $x \neq 4$



Άρα Π. ορισμού $A =$

(Πχ7) $f(x) = x^2-4x+3$

i) Να βρεθεί η τιμή του α αν $f(\alpha)=0$

ii) Να βρεθεί η τιμή του β αν $f(2)=2\beta+4$

(Πχ8) $f(x) = x^2-\beta x+\gamma$

Να βρεθούν οι τιμές των β, γ αν

$f(0)=6$ και $f(2)=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $f(x) = 2x^2 - 4$

α) Να βρεθούν οι τιμές $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = f(0) + 3f(2) - 4f(-1)$

2) $f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{αν } x<0 \\ x^2+2 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρεθούν $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = 2f(-2) + f(0) - f(2)$

3) $f(x) = 4x + 6$.

α) Να βρεθεί η τιμή του $α$ αν $f(α+1) = 8$.

β) Να βρεθεί η τιμή του $β$ αν $f(β) + f(2) = 32$.

4) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 10$ όταν $f(x) = x^2 - 3x + 12$

5) Αν $f(x) = |2x-6|$ να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 8$

6) Αν $f(x) = |2x-4| - |x-2|$ να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

7) Να βρεθεί το π. ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ β) $f(x) = \dfrac{2x+5}{|x|-3}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

α) Να βρεθεί το π. ορισμού

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$

9) Να βρεθεί το π. ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$ β) $f(x) = \sqrt{4x-x^2}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2-x+5}$ δ) $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2-1}}$

10) $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το π. ορισμού

β) Να υπολογ. το $A = f(-1) + f(3) + f(5)$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 25$

(Τρ.[illegible]-ΘΕΜ)

ΜΑΘΗΜΑ 26.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΣΤΟΧΟΣ • Να θυμηθούν οι μαθητές πως γίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

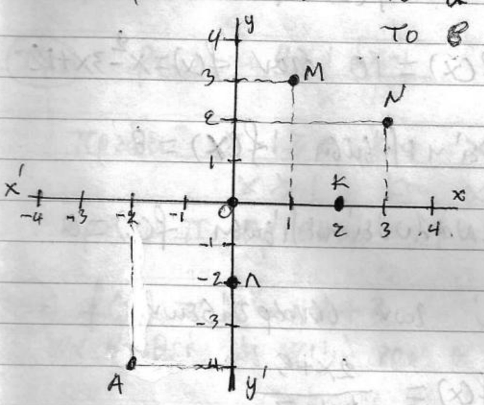
• Να βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφ. παράστασης με τους άξονες

• Να βρίσκουν πότε η γραφική παράσταση είναι πάνω και πότε κάτω από τον xx'

• Να βρίσκουν τις σχετικές θέσεις των γραφ. παραστάσεων δύο συναρτήσεων

• ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

Γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις ότι κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ μπορεί να παρασταθεί πάνω σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Το α λέγεται τετμημένη του σημείου. Το β λέγεται τεταγμένη του σημείου. Τα α,β λέγονται συντεταγμένες του σημείου.



πχ. το σημείο M είναι $M(1,3)$

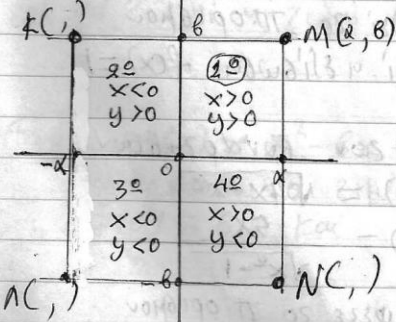
το σημείο N είναι $N(\ ,\ )$

το σημείο K είναι $K(\ ,\ )$

το σημείο Λ είναι $Λ(\ ,\ )$

το σημείο A είναι $A(\ ,\ )$

• ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟΥ.

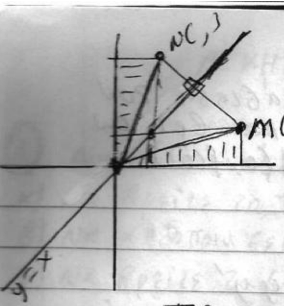


Έστω ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ τότε:

το συμμετρικό του ως προς xx' είναι $N(\ ,\ )$

Το συμμετρικό του ως προς xx' είναι $K(\ ,\ )$

Το συμμετρικό του ως προς O είναι $A(\ ,\ )$



Το Συμμετρικό ενός σημείου $M(\alpha,\beta)$ ως προς την διχοτόμο της $1^{ης}$, $3^{ης}$ γωνίας είναι το $N(\ , \ )$

ΠΡΟΣΟΧΗ * Αν ένα σημείο (Μ) ανήκει στον άξονα xx' τότε έχει τεταγμένη 0 άρα είναι $M(\alpha,0)$

* Ενώ αν ανήκει στον yy' έχει τετμημένη 0 άρα είναι $M(\ ,\beta)$

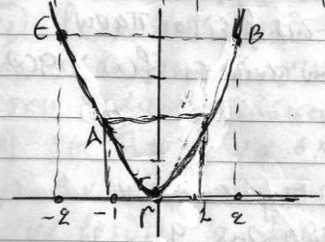
* Αν ανήκει πάνω στη διχοτόμο $1^{ης}$, $3^{ης}$ γωνίας είναι $M(\alpha, \ )$

• ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

Γραφική Παράσταση μιας συνάρτησης f λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου όπου το x παίρνει όλες τις τιμές του π. ορισμού της f και το $y=f(x)$

Πχ Για να κατασκευάσω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ που έχει π. ορισμού $A= . . .$

βρίσκω μερικές τιμές για $x=1$ είναι $f(1)=1^2=1$ άρα $A(1,1)$



για $x=2$ είναι $f(2)= . .$ άρα $B(\ , \ )$

για $x=0$ είναι $f(0)= . .$ άρα $\Gamma(\ , \ )$

για $x=-1$ είναι $f(-1)= . .$ άρα $\Delta(\ , \ )$

για $x=-2$ είναι $f(-2)= . .$ άρα $E(\ , \ )$

και ενώνω τα σημεία.

ΠΡΟΣΟΧΗ • Για να βρω που τέμνει η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τον άξονα xx' αφού η τεταγμένη είναι $y=0$ λύνω την εξίσωση $f(x)=0$.

• Για να βρω τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση είναι πάνω από τον xx' αφού $y>0$ λύνω την ανίσωση $f(x) \ . . \ 0$

• Για να βρω τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον xx' αφού $y<0$ λύνω την $f(x) \ . . \ 0$

• Για να βρώ, που τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα yy' αφού $x=0$ θέτω όπου $x=0$ και βρίσκω το $y=f(0)$ άρα το σημείο είναι $A(0,f(0))$.

ΠΧ $f(x) = x^2-5x+4$

α) που τέμνει τον xx' β) που τέμνει τον yy'

γ) που είναι πάνω από τον xx' δ) και που είναι κάτω.

ΛΥΣΗ

α) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$, $\Delta=$

$x_{1,2}=$ . . . άρα $A(,)$, $B(,)$

β) για $x=$ . . είναι $y=$ άρα $\Delta(,)$

γ)

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x)$		ϕ	ϕ	

πάνω από τον xx' όταν $f(x)$ . . 0 άρα $x\in$ . . .

δ) κάτω από τον xx' όταν $f(x)$ . . 0 άρα $x\in$ . . .

• Για να βρώ τα σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f,g λύνω την εξίσωση $f(x)=g(x)$

• Για να βρώ πού η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την γραφ. παράσταση της g λύνω την ανίσωση $f(x)>g(x)$

ΠΧ

$f(x)=2x^2-2x$, $g(x)=x^2+2x$

α) να βρείτε τα σημεία τομής των γραφ. παραστάσεων

β) πού η γραφ. παρ. της f είναι πάνω από της g.

Λύση.

α) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow$ . . . . $x=$ . . ή $x=$ . .

για $x=$ . . είναι $y=$ . . άρα $A( )$

για $x=$ . . είναι $y=$ . . άρα $B( )$

β) $f(x)>g(x) \Leftrightarrow$ . . . .

x			
	ϕ	ϕ	

$x\in$ . . .

(1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.
α) Να βρείτε το π. ορισμού
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες (τράπεζα θεμάτων 2ο.)

(2) $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A=f(-1)+f(0)-f(1)$
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης με τους άξονες
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση είναι πάνω από τον άξονα xx' (τράπεζα θεμάτων 2)

(3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ όπου α,β πραγματικοί αριθμοί
α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία $A(0,4)$ και $B(1,6)$ να βρεθούν τα α,β.
β) για $\alpha=2$ και $\beta=4$ να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφ. παράστασης της f με τους άξονες. (τραπ. θεμ. 2)

(4) $f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2$, $x\in\mathbb{R}$
α) Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ η συνάρτηση έχει γραφ. παράσταση που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$
β) για $\lambda=-1$ να σχεδιάσετε την γραφ. παράσταση της f
γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον xx' στο $B(2,0)$ να βρεθεί το λ και να εξετάσετε αν η γραφ. παράσταση τέμνει τον άξονα xx' και σε άλλο σημείο
δ) Για $\lambda=1$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα xx' (τραπ. θεμα 4)

(5) Δίνονται οι συναρτήσεις
$f(x)=x^3$, $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$
α) Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφ. παραστάσεων
β) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των γραφ. παραστ. Να δείξετε ότι τα A, B είναι συμμετρικά ως προς το O. (τρ. θεμ. 2)

6) $f(x) = x^2$, $g(x) = \lambda x + (1-\lambda)$ με $\lambda \neq 0$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για κάθε τιμή του λ.

β) Για ποια τιμή του λ οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε $(x_1+x_2)^2 = |x_1+x_2| + 2$

(Τράπεζα θεμάτων 4)

7) $f(x) = 4x+2$, $g(x) = x^2-9$, $x \in R$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφ. παράστασης της g με τον άξονα $x'x$

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από κάποιο από τα σημεία $A(3,0)$, $B(-3,0)$

γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο πάνω στον άξονα $x'x$ ώστε $f(x) = g(x)$

δ) Να βρεθεί συνάρτηση $h(x) = 4x+\beta$ που να τέμνει η γραφική της παράσταση την γραφ. παράσταση της g στο $A(3,0)$

(Τράπεζα θεμάτων 4)

8) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$, $g(x) = x^2 - \alpha + 3$, $\alpha \in R$

α) Να δείξετε ότι η γραφ. παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ για κάθε τιμή του $\alpha \in R$

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε ένα σημείο με τετμημένη 1

i) Να βρεθεί η τιμή του α ii) Για την τιμή του α που βρήκατε να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφ. παραστάσεων f,g.

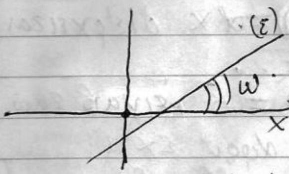
γ) Να βρείτε για ποιές τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των α,β έχουν δύο σημεία τομής

(Τραπεζ. θεμάτων 4.)

ΜΑΘΗΜΑ 27.
ΕΥΘΕΙΑ.

ΣΤΟΧΟΙ/. Να μπορούν οι μαθητές να βρίσκουν τη κλίση μια ευθείας
- Να κάνουν τη γραφική παράσταση ευθείας
- Να βρίσκουν τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών

• ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ.



Αν έχω μια ευθεία (ε) που σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα xx' τότε ονομάζω κλίση της ευθείας ή συντελεστή διεύθυνσης την εφαπτομένη της γωνίας δηλαδή $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$.

(ΘΥΜΑΜΑΙ. $\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$, $\varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$.
$\varepsilon\varphi 0^\circ = 0$, $\varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\varepsilon\varphi 135^\circ = -1$, $\varepsilon\varphi 120^\circ = -\sqrt{3}$.)

• ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

κάθε εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ ή $f(x) = \alpha x + \beta$ παριστάνει ευθεία. με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \alpha$ ~~και~~

Πχ1 η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3}x + 5$ παριστάνει ευθεία. και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \sqrt{3}$ άρα σχηματίζει γωνία 60° με τον xx'

Πχ2 η συνάρτηση $f(x) = -1x - 6$. Παριστάνει ευθεία και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$ άρα σχηματίζει γωνία . . . .

Πχ3 η συνάρτηση $f(x) = 0x + 5$ παριστάνει ευθεία και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda =$. άρα σχηματ. γωνία . . . .

Επομένως αν $f(x) = \alpha x + \beta$ η εξίσωση μιας ευθείας,
αν $\alpha > 0$ τότε η ευθεία σχηματίζει οξεία γωνία. με τον xx'
αν $\alpha < 0$ τότε η ευθεία σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον xx'
αν $\alpha = 0$ τότε η ευθεία είναι παράλληλη στο xx'

Αν μια ευθεία είναι κάθετη στον άξονα xx' και σχηματίζει γωνία 90° τότε δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης αφού δεν υπάρχει εφαπτομένη στις 90°

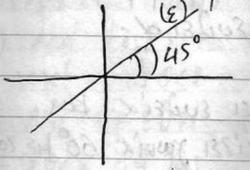
• Είδη ευθειών

1) κάθε εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$ παριστάνει ευθεία που σχηματίζει γωνία ω με τον xx' τέτοια ώστε $\varepsilon\varphi\omega=\alpha$ και διέρχεται από το σημείο $A(0, ..)$ αφού $f(0)= ..$

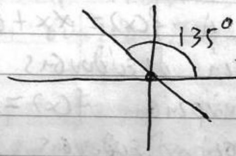
2) κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο $O(0,..)$ αφού $f(0)= ...$

3) κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\beta$ ή $y=\beta$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα ... αφού έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=0$ και σχημ. γωνία $0°$ με τον xx'

4) Η ευθεία με εξίσωση $f(x)=x$ ή $y=x$ έχει $\lambda= ..$ άρα σχηματίζει γωνία $\omega= ..$
Η ευθεία με εξίσωση $f(x)=-x$ ή $y=-x$ έχει $\lambda= ...$ άρα σχηματίζει γωνία $\omega= ...$



διχοτόμος 1ης, 3ης γωνίας

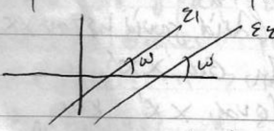


διχοτόμος 2ης, 4ης γωνίας

• Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Αν έχω δύο ευθείες με εξισώσεις
$(\varepsilon_1): y=\alpha_1 x+\beta_1$ $\quad(\varepsilon_2): y=\alpha_2 x+\beta_2$, $\beta_1\neq\beta_2$

α) αν $\alpha_1=\alpha_2$ τότε οι ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα σχηματίζουν ... γωνίες με τον xx' άρα είναι μεταξύ τους ... αν $\beta_1 .. \beta_2$

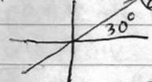


β) αν $\alpha_1\neq\alpha_2$ τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες άρα ....

πχ1 Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=2x+6$, $(\varepsilon_2): y=2x-8$ είναι μεταξύ τους . . . .

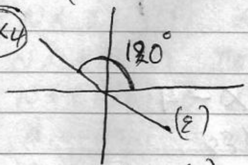
πχ2 Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=4x+6$, $(\varepsilon_2): y=2x+5$ . . . .

πχ3 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του σχήματος



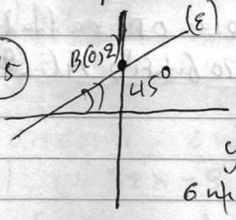
Αφού σχηματίζει γωνία 30° έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και διέρχεται από το $O(0,0)$ οπότε έχει εξίσωση $y=\lambda x$ δηλαδή $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

πχ4



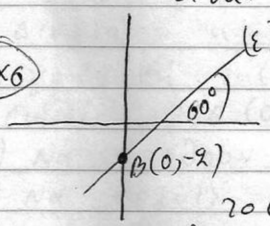
Η ευθεία (ε) σχηματίζει γωνία $\omega = 120^\circ$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda =$ . . . και εξίσωση $y =$ . . .

πχ5



Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$ άρα έχει εξίσωση $y = 1x+\beta$ και αφού διέρχεται από το σημείο $B(0,2)$ τότε $x=0$, $y=2$ δηλαδή $2 = 1\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta = 2$ άρα η εξίσωση είναι $y = 1x+2$.

πχ6



Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda =$ . . . άρα έχει εξίσωση $y =$ . . . και αφού διέρχεται από το σημείο $B(0,-2)$ τότε $x =$ . . $y =$ . . δηλαδή . . . .

πχ7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x+\beta$ που η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 5$

β) Να βρείτε πού τέμνει η γραφική παράσταση τους άξονες και να γίνει γραφική παράσταση.

102

ΛΥΣΗ/ α) είναι $f(1)=6$, $f(-1)=4$

$$\begin{cases} \alpha\cdot 1+\beta=6 \\ \alpha\cdot(-1)+\beta=4 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+\beta=6 \\ -\alpha+\beta=4 \end{cases} +$$

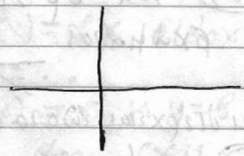
$$2\beta=10 \Leftrightarrow \beta=5$$

για $\beta=5$ είναι $\alpha+5=6 \Leftrightarrow \alpha=1$.

β) για $\alpha=1$ και $\beta=5$ είναι $f(x)=x+5$.

για.

για.



(ΠΧ8) Δίνονται οι ευθείες:

(ε_1): $y=4x+6$ $\quad (\varepsilon_2)$: $y=|\alpha+2|x-4$

α) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας (ε) που είναι παράλληλη προς τις (ε_1), (ε_2) και διέρχεται από το σημείο $A(2,10)$

ΛΥΣΗ

α) πρέπει

β) Έστω η (ε) έχει εξίσωση $y=\ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Να βρεθεί η εξίσωση μιας ευθείας

α) που έχει συντελεστή $\lambda = 4$ και διέρχεται από το σημείο $A(2,6)$

β) που σχηματίζει γωνία 45° με τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $B(4,4)$

γ) που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon_1): y = 6x - 4$ και διέρχεται από το σημείο $A(0,8)$.

δ) που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon_1): y = -4x + 8$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

② $f(x) = \alpha x + \beta$ με $f(0) = 5$, $f(1) = 1$.

α) Να δείξεις $\alpha = -2$, $\beta = 5$

β) Να βρείτε πού τέμνει η γραφ. παράσταση τους άξονες

γ) Να σχεδιάσεις την γραφική παράσταση. (Τραπ. θεμάτων 2)

③ Δίνονται οι ευθείες.

$(\varepsilon_1): y = 2x - 6$. και $\varepsilon_2: y = |2\alpha - 4|x + 8$.

Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

④ Δίνονται οι ευθείες.

$(\varepsilon_1): y = 32x - 8$ και $(\varepsilon_2): y = \alpha^5 x + 4$.

Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

⑤ Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$. που η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,6)$ και $B(2,10)$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των α, β

β) Να βρείτε πού τέμνει η ευθεία τους άξονες

⑥ Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = 2x + 6$. $(\varepsilon_2): y = x - 2$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται

β) Να βρεθεί το σημείο τομής των δύο ευθειών

γ) Να βρείτε σε ποιο διάστημα η (ε_1) είναι πάνω από την (ε_2)