151

ΜΑΘΗΜΑ 47 – ΜΑΘΗΜΑ 48.
ΚΑΝΟΝΕΣ DEL'HOSPITAL – ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ.

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

όπου το $x_0 \in \mathbb{R}$ ή $x_0 = \pm\infty$

Και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα)

ΠΡΟΣΟΧΗ Για να εφαρμόσω ΚΑΝΟΝΑ DLH πρέπει

1) Να έχω μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
2) Οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0.
3) Να υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.

$\boxed{1^η \text{ περίπτωση } \frac{0}{0}}$

Άσκηση 1) Να βρεθούν τα όρια ι) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ ιι) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

ι) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

ιι) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$

Άσκηση 2) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{2x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

Άσκηση 3) Αν η f παραγωγ. στο R και Αν $f(0) = 0$ και $f'(0) = 4$ Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ α) όταν η f' συνεχής στο 0
β) όταν δεν γνωρίζω αν η f' συνεχής στο

α) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim \frac{(f(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f'(x) =$

$\underset{\text{η } f' \text{ συνεχής στο } 0}{=} f'(0) = 4$

β) Όταν δεν γνωρίζω οτι η f' συνεχής στο 0 τότε δεν ισχύει $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ ∴ άρα δεν μπορώ να εφαρμόσω κανόνα DLH άρα το όριο βρίσκεται

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 4$. (λόγω ορισμού)

Άσκηση 4) Αν η f 2 φορές παραγωγ. στο R και Αν $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2$ να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ α) όταν η f'' συνεχής στο 0 (f 3 φορές παραγ.) β) όταν η f'' δεν γνωρίζω αν είναι συνεχής στο 0

α) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} \underset{f'' \text{ συνεχής}}{=} \frac{f''(0)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

β) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{1}{2}\cdot f''(0) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

Άσκηση 5) Να δείξετε $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)+f(x-4h)-2f(x)}{h^2} = 16f''(x)$

α) όταν η f'' συνεχής β) όταν δεν γνωρίζω αν η f'' συνεχής

α) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)+f(x-4h)-2f(x)}{h^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+4h)(x+4h)'+f'(x-4h)(x-4h)'-0}{2h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{4f'(x+4h)-4f'(x-4h)}{2h} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim \frac{4f''(x+4h)(x+4h)'-4f''(x-4h)(x-4h)'}{2}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{16f''(x+4h)+16f''(x-4h)}{2} = \frac{16f''(x)+16f''(x)}{2} = \frac{32f''(x)}{2} = 16f''(x).$

153

β) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+4h)+f(x-4h)-2f(x)}{h^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{4f'(x+4h)-4f'(x-4h)}{2h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4f'(x+4h)-4f'(x)-4f'(x-4h)+4f'(x)}{2h} =$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{4}{2}\left(\frac{f'(x+4h)-f'(x)}{h}\right) - \frac{4}{2}\cdot\left(\frac{f'(x-4h)-f'(x)}{h}\right)\right] =$

$= 2\cdot 4f''(x) + 2\cdot 4f''(x) = 16f''(x)$

αφού είναι:

- $\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+4h)-f'(x)}{h} \overset{k=4h}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+k)-f'(x)}{k/4} =$

$4\lim \frac{f'(x+k)-f'(x)}{k} = 4f''(x)$. (ορισμός παραγώγου)

- $\lim_{h\to 0} \frac{f'(x-4h)-f'(x)}{h} \overset{k=-4h}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+k)-f'(x)}{-k/4}$

$= -4\lim \frac{f'(x+k)-f'(x)}{k} = -4f''(x)$. (ορισμός παραγώγου)

$\boxed{2\ \text{ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ}\ \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}$

- Άσκηση 6/ Να βρεθούν τα όρια α) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{x}$, β) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

α) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x+x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{1} = +\infty$.

β) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} \overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} (xe^x) = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$

Άσκηση 7/ Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+e^x+2x}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+e^x+2x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}+e^x+2}{2x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x}+e^x}{2} = +\infty$

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $(+\infty-\infty)$

α) Αν έχω κλάσματα τότε κάνω ομώνυμα και καταλήγω σε μια από τις προηγούμενες περιπτώσεις

β) Αν δεν έχω κλάσματα τότε βγάζω κοινό παράγοντα

- Αν υπάρχει εκθετική βγάζω την εκθετική κοινό παράγοντα
- Αν δεν υπάρχει εκθετική τότε βγάζω την μεγαλύτερη δύναμη του x.

Άσκηση 8/ Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{x}\right)$

- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1-\sigma\upsilon\nu x}{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2+\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\cdot(2+\sigma\upsilon\nu x)=+\infty\cdot 3=+\infty$

Άσκηση 9/ Να βρεθούν τα όρια.

α) $\lim_{x\to+\infty}(e^x-x^2+2x-3)$ β) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x^2-2x+5)$

α) $\lim_{x\to+\infty}(e^x-x^2+2x-3)\overset{+\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}+\frac{2x}{e^x}-\frac{3}{e^x}\right)\right)$

$=+\infty(1-0+0-0)=+\infty$, αφού είναι

- $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x}=0$

155

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x^2 - 2x + 5) \overset{+\infty-\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)\right) =$

$= +\infty\cdot(0 - 1 - 0 + 0) = -\infty$. αφού είναι,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 5/x^2 = 0$.

$\boxed{4^{\eta}.\ \text{ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ}\quad (0\cdot\pm\infty)}$

Μετατρέπω το γινόμενο σε πηλίκο:
δηλαδή $\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ή $\lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, ή
$\lim\left(f(x)\cdot h(x)\cdot \frac{g(x)}{h(x)}\right)$

Προσοχή στον παρονομαστή κατεβάζω με τη σειρά e^x, x^ν

Άσκηση 10) Να βρεθούν τα όρια α) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot e^x$
β) $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln x$

α) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x \overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=\!=}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$

β) $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} =$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{-x^3}{3}\right) = 0$

Άσκηση 11) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x)$

$\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot x\ln x\right) = 1\cdot 0 = 0$

αφού είναι $\bullet \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

$\bullet \lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$

$\boxed{5^{\eta}\ \text{ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ}}\ \boxed{f(x)^{g(x)}}$

Αν έχω απροσδιοριστία τότε μετατρέπω:

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$ με $f(x) > 0$ και θέτω

$y = g(x)\cdot \ln f(x)$ (αλλαγή μεταβλητής)

<u>Άσκηση 12</u> Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}^{\,x}$ β) $\lim_{x\to +\infty} (x+2)^{\frac{1}{x}}$

• α) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}^{\,x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot \ln\sqrt{x}}$: Θέτω $y = x\cdot \ln\sqrt{x}$

τότε $y \to \lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sqrt{x}}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x}{2}\right) = 0^-$

άρα $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}^{\,x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\sqrt{x}} = \lim_{y\to 0^-} e^{y} = e^{0} = 1$

• β) $\lim_{x\to +\infty}(x+2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+2)}$ θέτω $y = \frac{1}{x}\ln(x+2) = \frac{\ln(x+2)}{x}$

τότε $y \to \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

άρα $\lim_{x\to +\infty}(x+2)^{1/x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(x+2)}{x}} = \lim_{y\to 0} e^{y} = e^{0} = 1$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΝΟΝΩΝ DE L'HOSPITAL.

ΑΣΚΗΣΗ 13| Αν η f συνεχής στο R και ισχύει
$(x^3+2x^2)f(x) = -2\eta\mu x - x^2 + 2x$ για κάθε $x \in R$
Να βρεθεί α) $f(0)$ β) ο τύπος της f.

α) αφού η f συνεχής στο R θα είναι και στο 0
άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f(x) = \dfrac{-2\eta\mu x - x^2+2x}{x^3+2x^2}$ άρα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\eta\mu x - x^2+2x}{x^3+2x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sigma\upsilon\nu x - 2x+2}{3x^2+4x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\eta\mu x - 2}{6x+4} = \frac{0-2}{0+4} = -\tfrac{1}{2}$$ άρα και $f(0) = -\tfrac{1}{2}$

β) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2\eta\mu x - x^2+2x}{x^3+2x^2} & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ -1/2 & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14| Αν $f^3(x)+3f(x) = 2e^x - x^2 - 2$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο R να υπολογίσετε
α) $f(0)$ β) $f'(0)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$

α) Για $x=0$ έχω $f^3(0)+3f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)\cdot(f^2(0)+3) = 0$
$f(0)=0$ ή $f^2(0) = -3$ αδύνατο άρα $f(0)=0$

β) Αφού η f παραγωγίσιμη στο R τότε και τα δύο μέλη της ισότητας είναι παραγωγίσιμα ως πράξεις παραγ. συναρτήσεων άρα έχω.
$3f^2(x)\cdot f'(x) + 3f'(x) = 2e^x - 2x \Leftrightarrow 3f'(x)\cdot(f^2(x)+1) = 2(e^x - x)$
$f'(x) = \dfrac{2(e^x-x)}{3(f^2(x)+1)}$ άρα $f'(0) = \dfrac{2}{3(0^2+1)} = \dfrac{2}{3}$

γ) Αφού η f συνεχής (ως παραγωγίσιμη) τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2(e^x-x)}{3(f^2(x)+1)}}{2x} =$

$= \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^x-1}{2x}\cdot\dfrac{2}{3(f^2(x)+1)}\right] = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3(0^2+1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}.$

Αφού $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

Άσκηση 15

$f(x) = \begin{cases} e^x+\alpha x, & x\le 0 \\ \ln(x+1)+\beta-2, & x>0 \end{cases}$ να βρεθούν οι τιμές των α, β αν γνωρίζετε ότι η f είναι παραγωγ. στο $x_0=0$.

Για να είναι παραγ. στο $x_0=0$ πρέπει πρώτα υποχρεωτικά να είναι συνεχής άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ άρα $1=\beta-2 \Leftrightarrow \beta=3$

Επίσης

για $x<0$ είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\alpha x-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\alpha}{1}=1+\alpha.$

για $x>0$ είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)+1-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1.$

Για να είναι παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δηλ. $1+\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=0$

Άσκηση 16 να υπολογίσετε το όριο

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\ln x}{e^x}$

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\,\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{\ln x}{e^x}\right)=1\cdot0=0$

Αφού είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\eta\mu y}{y}=1.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=0$

159.

Ασκήσεις.

Να υπολογίσετε τα όρια

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + ημ2x}{x - ημ2x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{συνx - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x^2 + 2x + 1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x - e^x)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln(e^x+1) - \ln(1+2e^x)\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4x - \ln(2+e^x)\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 \ln x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{-x} - 1)\ln x$

7) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^{ημx}\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

8) $\lim\limits_{x \to 0^+} (ημ2x \cdot \ln x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{x^x \cdot e^{2x}}{x^2}\right)$

9) Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=0$, $f'(0)=4$ και $f''(0)=2014$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 4x}{x^2}$

όταν α) η f'' συνεχής β) όταν η f'' δεν γνωρίζω αν είναι συνεχής

10) Αν η f 3 φορές παραγωγίσιμη στο R.
Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{h^2}$$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ.

Α) ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ $(x=\alpha)$ έχει μια συνάρτηση όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$, $\lim_{x\to\alpha^-} f(x)$ είναι μη πεπερασμένο δηλαδή $\pm\infty$.

Για κατακόρυφη ασύμπτωτη ψάχνουμε στα άκρα ανοικτού διαστήματος του π. ορισμού

ΑΣΚΗΣΗ 1) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ να εξετάσετε αν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

ΛΥΣΗ.

Είναι π. ορισμού της f το $A = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Άρα αν έχει κατακ. ασύμπτωτες θα έχει στα $x_1=-1$, $x_2=1$.

• Εξετάζω στο -1.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to -1^+} \frac{2x+3}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \ldots = -\frac{1}{2}$$

άρα δεν έχει κατακ. ασύμπτωτη στο $x_1=-1$.

• Εξετάζω στο 1.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\right) \overset{\left(\frac{6}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x+1}\right) = (+\infty)3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\right) \overset{\left(\frac{6}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x+1}\right) = (-\infty)\cdot 3 = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και από δεξιά και από αριστερά

Β] ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ $(y=β)$ έχει μια συνάρτηση στο $+\infty$ όταν το π. ορισμού της περιέχει διάστημα της μορφής $(α,+\infty)$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=β$ πραγματ. αριθμός

Ομοίως στο $-\infty$ όταν το π. ορισμού της περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,α)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=β$ πραγματ. αριθμός

ΑΣΚΗΣΗ 2] $f(x)=\dfrac{\ln x-3x}{x}$ να εξετάσετε αν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες

λύση

Π. ορισμού της f είναι $A=(0,+\infty)$

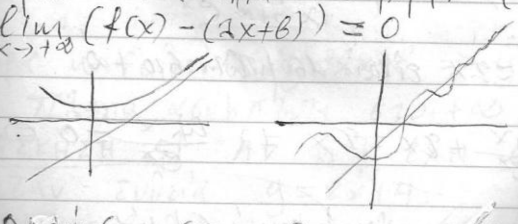
και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x-3x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-3\right)=0-3=-3$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

άρα η ευθεία $y=-3$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης στο $+\infty$.

Γ] ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ] $(y=λx+β)$

Μια ευθεία $(y=λx+β)$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ όταν το π. ορισμού της περιέχει διάστημα της μορφής $(α,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(λx+β)\right)=0$



Ομοίως στο $-\infty$ όταν όταν το π. ορισμού της f περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,α)$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(λx+β)\right)=0$

Για τον προσδιορισμό των πλαγίων ασυμπτώτων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αντίστοιχα στο $-\infty$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ| Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αντίστοιχα στο $-\infty$ αν και μόνο αν ισχύει.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$

Στη περίπτωση που $\lambda=0$ τότε η συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=\beta$ αν $\beta\in\mathbb{R}$

Άσκηση 3| $f(x)=\frac{\eta\mu x}{e^x}+2x$

α) Να δείξετε ότι η f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την $y=2x$

β) Να δείξετε ότι η C_f και η ασύμπτωτη έχουν άπειρα κοινά σημεία.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{e^x}+2x-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{e^x}=0$

αφού $\left|\frac{\eta\mu x}{e^x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|e^x|}\leq\frac{1}{e^x}$ άρα $-\frac{1}{e^x}\leq\frac{\eta\mu x}{e^x}\leq\frac{1}{e^x}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\lim(-1/e^x)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{e^x}=0$

οπότε η ευθεία $y=2x$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$

β) $f(x)=2x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{e^x}+2x=2x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{e^x}=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ άπειρα κοινά σημεία.

ΑΣΚΗΣΗ 4| $f(x) = \dfrac{x^2+3x+\ln x}{x}$ να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες

Λύση.

Π. ορισμού $A=(0,+\infty)$.

• Εξετάζω αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+3x+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(x+3+\frac{1}{x}\cdot\ln x\right) =$$

$$= 0+3+(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$

άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

• Εξετάζω αν έχει οριζόντια.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+\ln x}{x}\right) \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3+\ln x}{1}\right) = +\infty$$

δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

• Εξετάζω αν έχει πλάγια.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+\ln x}{x^2}\right) \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\left(\frac{2x+3+1/x}{2x}\right) \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2-1/x^2}{2} = \frac{2-0}{2} = 1 \text{ άρα } \lambda = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+\ln x}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+\ln x - x^2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+\ln x}{x}\right) \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{3+1/x}{1} = \frac{3+0}{1} = 3$$

άρα $\beta = 3$

Άρα η ευθεία $y=\lambda x+\beta \Rightarrow y=x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 5| Αν η f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x+4$.

α) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$

β) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-3x+4}{xf(x)-2x^2}$.

165

γ) Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ όταν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2xf(x) - \alpha x^2 + 2x + 4}{x^2 f(x) - 2x^3 + 6} = 2014$$

ΛΥΣΗ

α) $\lambda = 2$ και $\beta = 4$ άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 2$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = \beta = 4$

β) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - 3x + 4}{xf(x) - 2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - 3 + \frac{4}{x}}{f(x) - 2x} = \frac{2 - 3 + 0}{4} = -\frac{1}{4}$$

γ) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2xf(x) - \alpha x^2 + 2x + 4}{x^2 f(x) - 2x^3 + 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\frac{f(x)}{x} - \alpha + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}{f(x) - 2x + \frac{6}{x^2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2 - \alpha + 0 + 0}{4 + 0} = \frac{4 - \alpha}{4}$$

Πρέπει $\frac{4-\alpha}{4} = 2014 \Leftrightarrow 4 - \alpha = 8056 \Leftrightarrow \alpha = 8060$

ΑΣΚΗΣΗ 6] $f(x) = \frac{\alpha x^2 - 4\beta x + 6}{x - 4}$ Αν η f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 2x - 8$ να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in R$

ΛΥΣΗ

Πρέπει $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = -8$

άρα $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2 - 4\beta x + 6}{x^2 - 4x}\right) = 2 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2}{x^2}\right) = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

και $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2 - 4\beta x + 6}{x - 4} - 2x\right) = -8 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4\beta x + 6 + 8x}{x - 4}\right) = -8$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{(8 - 4\beta)x + 6}{x - 4} = -8 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{(8-4\beta)x}{x} = -8 \Leftrightarrow 8 - 4\beta = -8$$

$4\beta = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) $f(x) = \frac{4xe^x + ημx}{e^x}$ Να δείξετε ότι έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 4x$

2) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων.
α) $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ β) $f(x) = \frac{4x^2-5x+3}{x-2}$ γ) $f(x) = x-2+\frac{1}{x-2}$
δ) $f(x) = e^{1/x}$

3) $f(x) = \frac{x^2+x+2α}{x-α^2}$ Να βρεθούν οι τιμές του $α \in R$ ώστε η f να έχει ασύμπτωτη την $x = 1$

4) $f(x) = \frac{αx^2+4x+2}{4x^2+2}$, $α \neq 0$ Να βρεθούν οι τιμές του $α \in R$ ώστε η f να έχει ασύμπτωτη την $y = 2$.

5) $f(x) = \frac{(α-1)x^2+βx+4}{x-2}$ να βρεθούν οι τιμές των $α, β \in R$ ώστε η f να έχει ασύμπτωτη την $y = 2x-5$.

6) Αν η f έχει ασύμπτωτη την $y = 2x+1$ στο $+\infty$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to +\infty} \frac{4f(x)+4x+2}{xf(x)-2x+6x}$.

7) Αν η f έχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη την $y = 4x-4$.
Να βρεθεί η τιμή του $α \in R$ ώστε
$\lim \frac{xf(x)+αx^2+4}{x^2f(x)-4x^3+2αx^2+6} = 10$

8) Αν $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
και η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 2x-3$
Να βρεθεί ο τύπος της f

ΜΑΘΗΜΑ 50

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ – ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1) $f(x) = x-2+\frac{1}{x-2}$

Να μελετηθεί η συνάρτηση. Να γίνει πίνακας μεταβολών και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση

ΛΥΣΗ

- Πεδίο ορισμού $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

- Μονοτονία. $f'(x) = 1-\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ για κάθε $x\in A$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	‖ −	+	
$f(x)$	↗	↘	‖ ↘	↗	
		ΤΜ		ΤΕ	

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$

για $x\in(-\infty,1]$ η f ↗

για $x\in[1,2)$ η f ↘

για $x\in(2,3]$ η f ↘

για $x\in[3,+\infty)$ η f ↗

για $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό μεγ το $f(1)=-2$

για $x=3$ η f παρουσιάζει τοπικό ελαχ το $f(3)=2$

- Κυρτότητα $f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$ για κάθε $x\in A$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	−	‖	+
$f(x)$	⌒	‖	⌣

για $x\in(-\infty,2)$ η f είναι κοίλη

για $x\in(2,+\infty)$ η f είναι κυρτή

δεν έχει σημεία καμπής.

- οριακές τιμές – ασύμπτωτες

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim(x-2+\frac{1}{x-2}) = 0-\infty = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim(x-2+\frac{1}{x-2}) = 0+\infty = +\infty$

άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-2+\frac{1}{x-2}) = +\infty-2+0 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\left(x-2+\frac{1}{x-2}\right) = -\infty-2+0 = -\infty$

Δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2+\frac{1}{x-2}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2-2x}\right)$

$= 1-0+0 = 1$ άρα $\lambda=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{1}{x-2}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{x-2}\right) =$

$= -2+0 = -2$ άρα $\beta=-2$

Άρα η ευθεία $y=1\cdot x-2 = x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=-2$.

άρα η ευθεία $y=x-2$ είναι ασύμπτωτη και στο $-\infty$

• Για $x=0$ είναι $y=f(0)=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον yy' στο $A(0,-\frac{5}{2})$

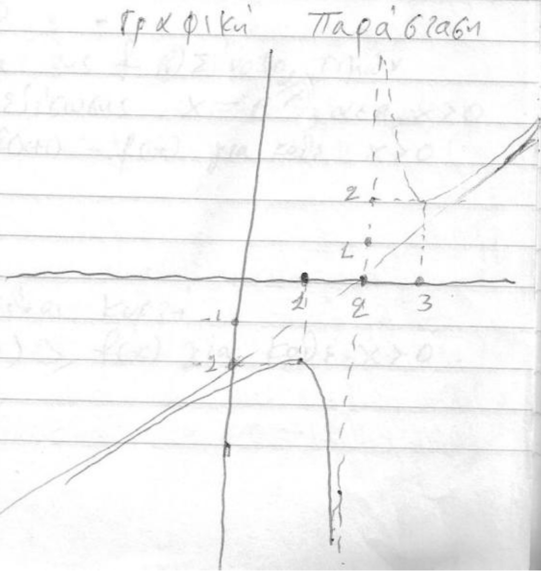
Για $y=0$ είναι $(x-2)+\frac{1}{x-2}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+1=0 \Leftrightarrow x^2-4x+5=0$

δεν έχει ρίζες άρα δεν τέμνει τον xx'

• Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		+	0	−	‖	−	0	+	
f''		−		−	‖	+		+	
f	$-\infty$	↗	ΤΜ -2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	ΤΕ 2	↗	$+\infty$

Γραφική Παράσταση



Η ευθεία $y=x-2$

για $x=0$ είναι $y=-2$

για $y=0$ είναι $x=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
Να μελετηθεί η συνάρτηση, να γίνει πίνακας μεταβολών και πρόχειρη γραφική παράσταση

2) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$ Να μελετηθεί η συνάρτηση, να γίνει πίνακας μεταβολών και πρόχειρη γραφική παράσταση.

3) $f(x) = \ln(x^2-4)$. ομοίως.

4) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ ομοίως

5) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ομοίως

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

(1) $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln^2 x}$

α) Μονοτονία ακρότατα.
β) Σύνολο Τιμών
γ) Να λυθεί η ανίσωση $\ln^2 x < x-1$.

(2) $f(x) = 2x + \dfrac{\ln x}{x}$

α) Να δείξετε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x > 0$
β) Μονοτονία της f γ) κυρτότητα της f
δ) Να βρεθεί η σχετική θέση της C_f και της ευθείας $y=3x$.

(3) Αν η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και f'' γνησίως φθίνουσα στο R και $g(x) = f(x) - f(4-x)$
Να βρεθεί η κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής

(4) Αν η f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.
και $f(0) = f'(0) = 0$ και $e^x \cdot (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$

α) Να δείξετε $f(x) = \ln(e^x - x)$
β) Μονοτονία ακρότατα
γ) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς 2 σημεία καμπής
δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$

(5) $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Μονοτονία, ακρότατα της f β) Σύνολο Τιμών
γ) Πλήθος ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$, $\alpha \in R$, $x > 0$
δ) Να δείξετε $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$

(6) $f(x) = x^x$, $x > 0$

α) Μονοτονία ακρότατα
β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
γ) Να δείξετε $f(x + f'(x)) \geq f(x)$ για κάθε $x > 0$.

(7) Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει $2f(x^2) - f^2(x) \geq 1$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$,

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0$

γ) Να δείξετε με τη βοήθεια Θ. Fermat ότι $f(0)=f(1)=0$

δ) Να δείξετε ότι η $f''(x)=0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες

(8) $f(x) = ημx - x + \frac{1}{6}x^3$

α) Κυρτότητα της f

β) Μονοτονία, ακρότατα της f

γ) Να βρεθεί η ρίζα της f και το πρόσημο της

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(4x)$

(9) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, $x>0$ και $g(x) = e^x \ln x$, $x>0$

α) Να δείξετε $g''(x) = e^x f(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία, κυρτότητα

γ) Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα

δ) Να δείξετε ότι η g έχει μόνο ένα σημείο καμπής

(10) α) Να δείξετε $\ln x < x-1$ για κάθε $x>0$

β) Να μελετήσετε την $f(x) = x\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, $x>0$ ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο της

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $2\ln x < x - \frac{1}{x}$, $x>0$

(11) Αν η f παραγωγίσιμη στο $(-e,e)$, $f(0)=2$ και $f'(x) = -2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in (-e,e)$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(e^2 - x^2)$

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $α<0<β$ ώστε $f(α)+f(β)=2$ ε) Να δείξετε $f'(α) > f'(β)$

12) A| Να δείξετε $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in R$.

B| Έστω $f(x)=e^x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=x$

α) Να δείξετε ότι η C_f και η (ε) δεν τέμνονται

β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση που μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την (ε)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\ln x-1]$

13) A| Να δείξετε $x-\ln x \geq 1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

B| Έστω $f(x)=\ln x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=x$.

α) Να δείξετε ότι η C_f και η (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

β) Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση που μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την (ε)

γ) Να υπολογίσετε $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x^2)-f(x+1))$

δ) Να υπολογίσετε $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-f(e^x+1))$.

14| Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R για την οποία ισχύει $e^x f(x)+e^x f'(x)=-f'(x)$ και $f(1)=1$

α) Να δείξετε $f(x)=\frac{e+1}{e^x+1}$, $x\in R$.

β) Να βρεθεί η μονοτονία, τα ακρότατα της f.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f.

δ) Ένα κινητό κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της C_f και την χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(1,f(1))$ η τεταγμένη αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης

15| Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{\ln x}{x}$, $x>0$

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f

β) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0)=0$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{1}{1-x_0}$