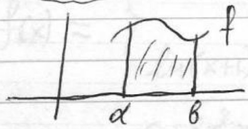
ΜΑΘΗΜΑΤΑ 56-57-58.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ.

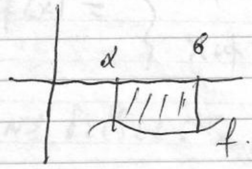
1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Εστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα xx' και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ είναι:

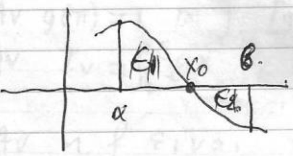
$$E = \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx.$$

α) 

αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $E = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

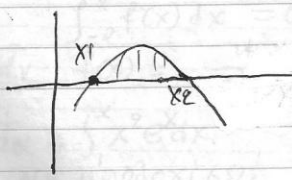
β) 

αν $f(x) \leq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $E = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

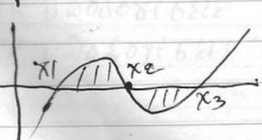
γ) 

αν η f αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$E = E_1 + E_2 = \int_\alpha^{x_0} f(x)\,dx - \int_{x_0}^\beta f(x)\,dx.$$

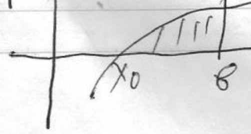
δ) 

αν δεν δίνονται άκρα τότε $E = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, όπου x_1, x_2 ρίζες

η) 

$E = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx$, x_1, x_2, x_3 ρίζες

αν δίνεται ένα άκρο τότε

ε) 

$E = \int_{x_0}^\beta f(x)\,dx$, x_0 ρίζα.

Άρα Για να βρω το Εμβαδόν στο $[\alpha, \beta]$ πρέπει

- Να εξετάσω αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Να βρω το πρόσημο της f στο $[\alpha, \beta]$

(με πίνακα προσήμων) ή (με τη βοήθεια της μονοτονίας και ακροτάτων) ή (με σύνολο τιμών).

Πχ1 $f(x) = 4x^3 - 4x$ να βρεθεί το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=0$, $x=2$

ΛΥΣΗ

Π. ορ. της f: $A=\mathbb{R}$ η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα συνεχής και στο $[0,2]$.

είναι $f(x) = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1)$, ρίζες $-1, 0, 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

για $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \leq 0$

για $x \in [1,2]$ είναι $f(x) \geq 0$.

άρα $E = -\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$

$$E = -\int_0^1 (4x^3-4x)\,dx + \int_1^2 (4x^3-4x)\,dx = -\left[x^4-2x^2\right]_0^1 + \left[x^4-2x^2\right]_1^2$$

$$= -[-1-0] + [8-(-1)] = 1+8+1 = 10$$

Πχ2 $f(x) = 4xe^{2x}$ Να βρεθεί το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα xx' και την ευθεία $x=1$

λύση

Π. ορισμού $A=\mathbb{R}$. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ αφού $e^{2x}>0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		

αφού δίνεται μια ευθεία τότε το άλλο άκρο θα είναι ρίζα.

άρα η f συνεχής στο $[0,1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ οπότε:

$$E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 4x e^{2x} dx = \int_0^1 4x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx =$$

$$= \left[4x \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (4x)' \frac{e^{2x}}{2} dx = \left[2x e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 2e^{2x} dx$$

$$= \left[2x e^{2x}\right]_0^1 - \left[e^{2x}\right]_0^1 = (2e^2 - 0) - (e^2 - 1) = e^2 + 1$$

Πχ3) $f(x) = \ln x + x - 1$ Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από C_f τον άξονα xx' και την ευθεία $x = e$.

Λύση

Π. ορισμού της f: $A = (0,+\infty)$ η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Παρατηρώ ότι $f(1) = 0$. και $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0, x \in R$

άρα η $f \nearrow$ στο R άρα έχει μοναδική ρίζα το 1.

οπότε πρόσημο της f.

x	0	1	e	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	

$f(1) = 0$

για $x > 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

για $x < 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

άρα για $x \in [1, e]$ είναι $f(x) \geq 0$ οπότε

$$E = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e (\ln x + x - 1)dx =$$

$$= \left[x\ln x - x + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \left(-1 + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2}$$

Πχ4) $f(x) = x^3 - x$ Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f και xx'

ΛΥΣΗ

Π. ορισμού $A = R$ η f συνεχής στο R ως πολυωνυμική

αφού δεν δίνονται τα άκρα βρίσκω τις ρίζες

$f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ ρίζες $-1, 0, 1$

Πρόσημο.

x		-1		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

άρα $E=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)\,dx$.

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}$

ΠΧ5 | ΕΜΒΑΔΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

$f(x)=\ln x+x-1$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη της οποίας να βρεθεί το π. ορισμού

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, του xx' και τις ευθείες $x=0$, $x=e$.

ΛΥΣΗ

Π. ορισμού της f: $A=(0,+\infty)$ η f συνεχής στο A και παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 άρα έχει αντίστροφη. Π. ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f που είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Παρατηρώ ότι $f(1)=0$ και $f(e)=e$. άρα

Για $x\in[1,e]$ ↗ Σ. τιμών $[f(1),f(e)]=[0,e]$

και αφού η f συνεχής στο $[1,e]$ λόγω του ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ τότε και η f^{-1} θα είναι συνεχής στο $[0,e]$ και για $x\in[0,e]$ θα έχει Σ.Τ το $[1,e]$ άρα $f^{-1}(x)>0$ για $x\in[0,e]$

2.11

Άρα $E = \int_0^e f^{-1}(x)dx$ θέτω $u = f^{-1}(x)dx \Leftrightarrow x = f(u)$

τότε $dx = f'(u)du$.

για $x = 0 \Rightarrow 0 = f(u) \Leftrightarrow f(1) = f(u) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} 1 = u$.

για $x = e \Rightarrow e = f(u) \Leftrightarrow f(e) = f(u) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} e = u$.

άρα $E = \int_1^e u f'(u)\,du = \int_1^e u\cdot\left(\frac{1}{u}+1\right)du = \int_1^e (1+u)\,du$

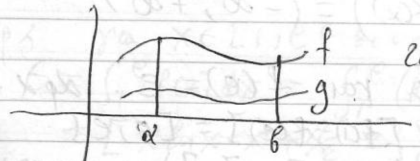
$= \left[u + \frac{u^2}{2}\right]_1^e = \left(e + \frac{e^2}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = e + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$.

2. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ είναι

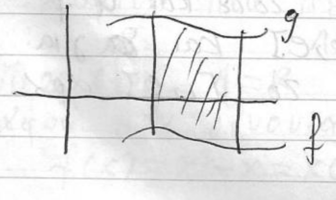
$$E = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|\,dx.$$

α) αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$



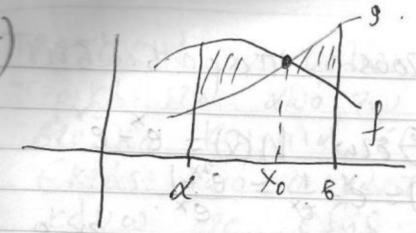
τότε $E = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\,dx$.

β) αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$



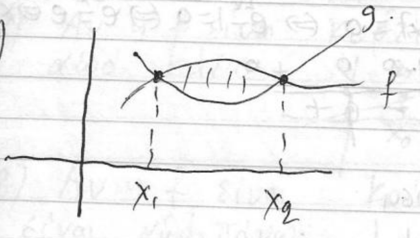
τότε $E = -\int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx = \int_\alpha^\beta (g(x) - f(x))dx$

γ)



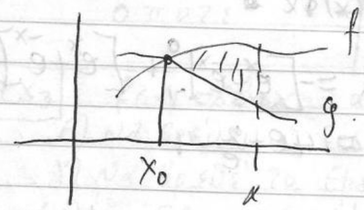
$$E=\int_{\alpha}^{x_0}\big(f(x)-g(x)\big)dx+\int_{x_0}^{\beta}\big(g(x)-f(x)\big)dx.$$

δ)



$$E=\int_{x_1}^{x_2}\big(f(x)-g(x)\big)dx.$$

ε)



$$E=\int_{x_0}^{\alpha}\big(f(x)-g(x)\big)dx$$

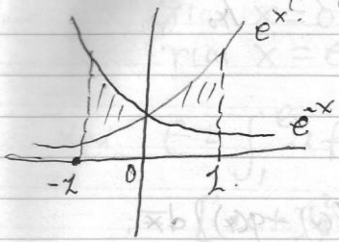
Άρα για να βρώ το εμβαδόν του χωρίου πρέπει να γνωρίζω τη θέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων ή για ευκολία θέτω $h(x)=f(x)-g(x)$. οπότε $E=\int_{\alpha}^{\beta}|h(x)|dx$ και εργάζομαι όπως στην περίπτωση 1 σαν να έχω την συνάρτηση h τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$.

Πχ) Έστω $f(x)=e^{x}$, $g(x)=e^{-x}$ Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, C_g και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$.

ΛΥΣΗ.

Π. ορισμού και των δύο είναι $A=\mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[-1,1]$

κάνω τις γραφικές τους παραστάσεις αν τις θυμάμαι.



ή Θέτω $h(x)=e^x-e^{-x}$.

$h(x)=e^x-\frac{1}{e^x}=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

$h(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x}=e^0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$

άρα σε κάθε περίπτωση.

$E=E_1+E_2=-\int_{-1}^{0}h(x)\,dx+\int_0^1 h(x)\,dx$

$E=-\int_{-1}^{0}(e^x-e^{-x})\,dx+\int_0^1(e^x-e^{-x})\,dx=-\left[e^x+e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1$

$E=-\left(2-e-\frac{1}{e}\right)+\left(e+\quad-2\right)=2e+\frac{2}{e}-4$

$\boxed{\text{Πχ}_2}$ Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ $g(x)=x-1$ και $x=0$, $x=1$.

ΛΥΣΗ

Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-x+1$, Π.ορ. $A=\mathbb{R}$.

Η h συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$

Είναι $h'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	ελ	$\nearrow$

$h(0)=0$.

για $x>0 \nearrow h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0$

για $x<0 \searrow h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0$

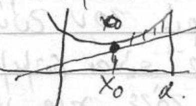
άρα για $x\in[0,1]$ είναι $h(x)\geq 0$

Οπότε $E=\int_0^1 h(x)\,dx=\int_0^1(e^x-x+1)\,dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$

$=\left(e-\frac{1}{2}+1\right)-(1-0+0)=e-\frac{1}{2}$.

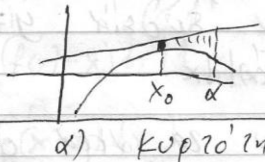
ΠΡΟΣΟΧΗ Αν θέλω να βρω το Εμβαδόν που περικλείεται από την C_f και την εφαπτομένη της στο x_0 και μια ευθεία $x=\alpha$ τότε. Εκτός από το να πάρω $h(x)=f(x)-$ εφαπτομένη κάνω το εξής.

α) Αν η f είναι κυρτή τότε η εφαπτομένη είναι από κάτω.



οπότε
$$E=\int_{x_0}^{\alpha}(f(x)-\text{εφαπτ.})\,dx.$$

β) Αν η f είναι κοίλη τότε η εφαπτομένη είναι από πάνω οπότε



$$E=\int_{x_0}^{\alpha}(\text{εφαπτομ}-f(x))\,dx$$

ΠΧ3] $f(x)=x\ln x$ α) κυρτότητα της f

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=e$.

γ) Να βρεθεί το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, εφαπτομένη, και την ευθεία $x=1$.

ΛΥΣΗ

α) Π.ορ. $A=(0,+\infty)$ η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο A με $f'(x)=\ln x+1$ και $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, $x\in(0,+\infty)$ άρα η f είναι κυρτή

β) εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=e$ είναι
$y-f(e)=f'(e)(x-e) \Rightarrow y-e=2(x-e) \Leftrightarrow y=2x-e$.

γ) Αφού η f είναι κυρτή τότε η εφαπτομένη είναι από κάτω δηλαδή $f(x)\geq 2x-e$ για κάθε $x>0$ άρα

$$E=\int_1^e(f(x)-(2x-e))\,dx=\int_1^e(x\ln x-(2x-e))\,dx=$$
$$=\int_1^e x\ln x\,dx-\int_1^e(2x-e)\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx-\left[x^2-ex\right]_1^e$$
$$\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'\,dx-\left[e-1\right]=\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx-(e-1)$$
$$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e-e+1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-e+1$$

2151

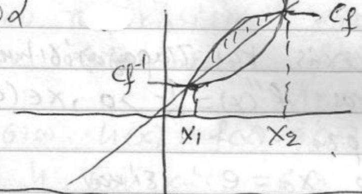
ΠΡΟΣΟΧΗ. Αν θέλω να βρώ το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

α) Αν μπορώ να βρώ τον τύπο της αντίστροφης τότε θέτω $h(x) = f(x) - f^{-1}(x)$ και $E = \int_\alpha^\beta |h(x)|\,dx$.

β) Αν δεν μπορώ να βρώ τον τύπο της αντίστροφης τότε επειδή C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, τότε για να βρώ την σχετική θέση της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκω την σχετική θέση της C_f με την ευθεία $y=x$ και

$$E = \int_\alpha^\beta |f(x) - f^{-1}(x)|\,dx$$

γ) Αν δεν δίνονται τα άκρα ολοκλήρωσης τότε βρίσκω που η C_f τέμνει την ευθεία $y=x$ λύνοντας την εξίσωση $f(x)=x$. Έστω x_1, x_2. Τότε στα ίδια σημεία τέμνει και η $C_{f^{-1}}$ την $y=x$.
άρα



τότε $$E = 2\int_{x_1}^{x_2} |f(x) - x|\,dx$$

ΠΧΗ $f(x) = x^3$

α) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη.

β) Να βρεθεί το Εμβαδόν που περικλείεται από C_f, $C_{f^{-1}}$

ΛΥΣΗ

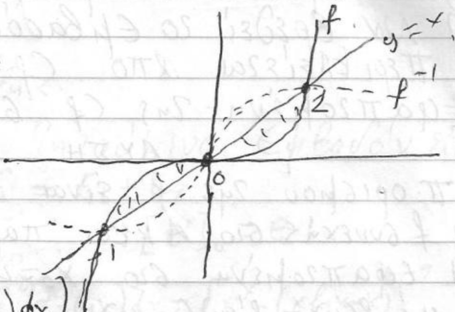
α) Π. ορ. της f: $A=\mathbb{R}$. η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ άρα η $f \nearrow$ άρα και 1-1
άρα η f έχει αντίστροφη

β) Ο τύπος της αντίστροφης δύσκολα υπολογίζεται άρα βρίσκω που η C_f τέμνει την $y=x$. και την σχετική τους θέση.

Έστω $h(x) = f(x) - x = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

x		-1		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

οπότε



$$E = 2\int_{-1}^{1} |f(x)-x|\,dx =$$

$$= 2\left(\int_{-1}^{0} (f(x)-x)\,dx - \int_{0}^{1} (f(x)-x)\,dx\right)$$

$$= 2\left(\int_{-1}^{0} (x^3-x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3-x)\,dx\right)$$

$$= 2\left(\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right) = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1$$

3 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	ΤΡΕΙΣ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Για να βρω το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τρείς ή περισσότερες συναρτήσεις τότε υποχρεωτικά κάνω σχήμα. Και χωρίζω το χωρίο σε δύο ή περισσότερα χωρία. Έτσι ώστε κάθε ένα να περικλείεται από δύο συναρτήσεις βρίσκω τα επί μέρους Εμβαδά και το άθροισμά τους είναι το συνολικό Εμβαδόν

$\boxed{\Pi\chi 5}$ $f(x) = 4\sqrt{x}$

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 4$

β) Να βρεθεί η κυρτότητα της C_f.

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, τον άξονα xx' και την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 4$

ΛΥΣΗ

α) Π. ορισμού της f είναι $A = [0, +\infty)$.

η f συνεχής στο A και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

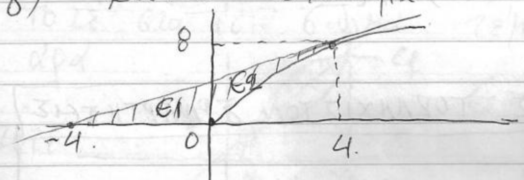
Η εφαπτομένη στο $x_0 = 4$ είναι.

$y - f(4) = f'(4)(x-4)$

$y - 8 = 1(x-4) \Leftrightarrow y = x+4$

β) Είναι $f''(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} < 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα η f είναι κοίλη. άρα η εφαπτομένη είναι από πάνω.

γ) κάνω σχήμα.



Η εφαπτομένη τέμνει τον xx' στο -4. αφού για $y=0$ είναι $x=-4$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν $E = E_1 + E_2$.

$$E_1 = \int_{-4}^{0} (x+4)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{0} = 8$$

$$E_2 = \int_{0}^{4} (x + 4 - 4\sqrt{x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4} =$$

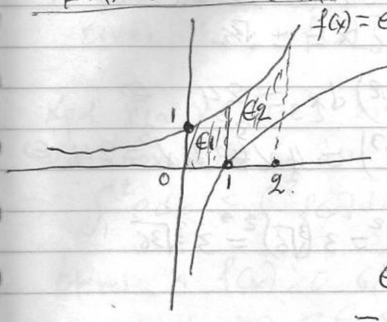
$$= 24 - \frac{8}{3}4^{3/2} = 24 - \frac{8}{3}\sqrt{4^3} = 24 - \frac{8}{3}\cdot 8 = \frac{8}{3}$$

άρα $E = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$

ΠΧ6| Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, xx', C_g, $x=0$, $x=2$.

ΛΥΣΗ.

ΚΑΝΩ ΣΧΗΜΑ



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$E = E_1 + E_2$

$E_1=\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1$

$E_2 = \int_1^2 (e^x - \ln x)dx = [e^x-(x\ln x - x)]_1^2$

$= (e^2 - 2\ln 2 + 2) - (e+1) = e^2-2\ln 2 - e+1$.

Άρα $E = e-1+e^2-2\ln 2-e+1 = e^2-2\ln 2 = e^2-\ln 4$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΧΩΡΙΟΥ ΣΕ ΔΥΟ ΜΕΡΗ

ΠΧ7| Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2$.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, και την ευθεία $y=12$.

β) Να βρεθεί οριζόντια ευθεία $y=3\alpha^2$ που χωρίζει το χωρίο σε δύο μέρη που το κάτω να είναι τριπλάσιο του πάνω.

γ) Να βρεθεί κατακόρυφη ευθεία $x=\beta$ που χωρίζει το χωρίο σε δύο μέρη που το αριστερό να είναι διπλάσιο του δεξιού μέρους.

ΛΥΣΗ.

α)

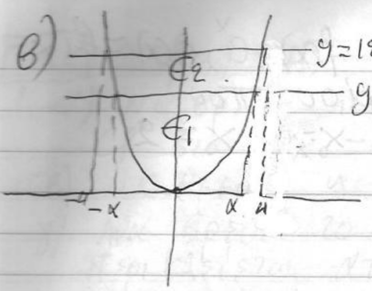
Έστω $g(x)=3x^2-12$

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=2,\ x=-2$

$E=-\int_{-2}^{2}(3x^2-12)\,dx = -[x^3-12x]_{-2}^{2}$

$=-(-16-(-8+24)) = +16+16 = 32$

β)



Είναι. $\left.\begin{array}{l} E_1+E_2=32 \\ E_1=3E_2 \end{array}\right\}$ $E_1+\frac{E_1}{3}=32 \Rightarrow$
$4E_1=96 \Rightarrow$
$E_1=24$.

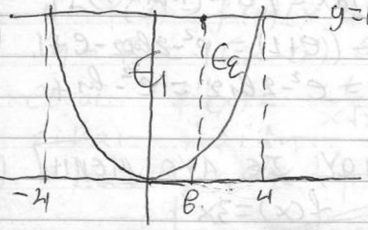
Είναι. $f(x)=\alpha \Leftrightarrow 3x^2=3\alpha^2 \Leftrightarrow$
$x^2=\alpha^2 \Leftrightarrow x=\pm\alpha$,

$E_1=24 \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}(3\alpha^2-3x^2)\,dx=24. \Leftrightarrow$

$[3\alpha^2x-x^3]_{-\alpha}^{\alpha}=24 \Leftrightarrow 2\alpha^3-(-2\alpha^3)=24 \Leftrightarrow 4\alpha^3=24 \Leftrightarrow$
$\alpha^3=6 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{6}$.

Άρα η ευθεία είναι $y=3\alpha^2=3(\sqrt[3]{6})^2=3\sqrt[3]{36}$

γ)



Είναι $\left.\begin{array}{l} E_1+E_2=32 \\ E_1=2E_2 \end{array}\right\}$ άρα $2E_2+E_2=32$
$3E_2=32$
$E_2=\frac{32}{3}$

Οπότε.
$E_2=\frac{32}{3} \Rightarrow \int_{\beta}^{4}(12-3x^2)=\frac{32}{3} \Leftrightarrow$

$[12x-x^3]_{\beta}^{4}=\frac{32}{3} \Leftrightarrow (-16)-(12\beta-\beta^3)=\frac{32}{3} \Leftrightarrow$

$\beta^3-12\beta-16=\frac{32}{3}$

$3\beta^3-36\beta-48=32 \Leftrightarrow 3\beta^3-36\beta-80=0$ κτλ.

υπολογίζω το β. (εδώ η εξίσωση δεν λύνεται)

ΠΧ8 $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x>0$

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f για $x\in[1,2]$

β) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, xx' και τις ευθείες $x=1$, $x=2$. Να δείξετε ότι $2e<2E<e^2$

ΛΥΣΗ

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξ. Παρ. συναρτ.
με $f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$	

Για $x\in[1,2]$ η f συνεχής και $\nearrow$ άρα Σύνολο Τιμών είναι $[f(1),f(2)]=[e,\frac{e^2}{2}]$

Άρα για $x\in[1,2]$ είναι $e\le f(x)\le \frac{e^2}{2}$ και αφού το ίσον δεν ισχύει παντού τότε.

$$\int_1^2 e\,dx \le \int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 \frac{e^2}{2}dx \Rightarrow e<\int_1^2 f(x)dx<\frac{e^2}{2}.$$

όμως η $f(x)>0$ στο $[1,2]$ άρα $E=\int_1^2 f(x)dx$ οπότε.

$$e<E<\frac{e^2}{2} \Leftrightarrow 2e<2E<e^2.$$

ΠΧ9) Αν η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^3(x)+f(x)=2x$ (1)

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f και το πρόσημο της

β) Να βρεθεί η κυρτότητα της f

γ) Να υπολογίσετε $f(0)$ και $f(1)$

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, xx', $x=0$, $x=1$

ΛΥΣΗ

α) Αφού η f παραγωγίσιμη στο R τότε και τα δύο μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμα στο R οπότε.

$$(f^3(x)+f(x))'=(2x)' \Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=2 \Leftrightarrow$$
$$f'(x)(3f^2(x)+1)=2 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2}{3f^2(x)+1}>0 \quad (2)$$

άρα η f $\nearrow$ στο R.

Είναι $f^3(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1)=2x \Leftrightarrow f(x)=\frac{2x}{f^2(x)+1}$.

άρα

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

β) Η f' παραγωγίσιμη στο R ως π.π.σ αφού το β' μέλος της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμο ως π.π.σ. με

221

με $f''(x) = \frac{-2\left(3f^2(x)+1\right)'}{\left(3f^2(x)+1\right)^2} = \frac{-12\, f(x)\cdot f'(x)}{\left(3f^2(x)+1\right)^2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-12f(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$		$+$
$(3f^2(x)+1)^2$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⌣	σκ.	⌢

για $x \in (-\infty, 0]$ η f κυρτή
για $x \in [0, +\infty)$ η f κοίλη.

γ) Από την σχέση $f^3(x)+f(x)=2x$.
για $x=0$ έχω $f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0)+1)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$
για $x=1$ έχω $f^3(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow f^3(1)+f(1)-2=0$.
Θέτω $y=f(1)$ και έχω $y^3+y-2=0 \underset{\text{Horner}}{\overset{\text{σχήμα}}{\Leftrightarrow}} (y-1)(y^2+y+2)=0$
$\Leftrightarrow y=1$ άρα $f(1)=1$

δ) Για $x \in [0,1]$ η f συνεχής και $f(x) \geq 0$.
άρα $E=\int_0^1 f(x)\,dx$.
Από τη σχέση $f^3(x)+f(x)=2x$ αφού $f'(x)>0$
έχω $f^3(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f'(x)=2x\cdot f'(x)$ οπότε

και $\int_0^1 f^3(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx=\int_0^1 2x f'(x)\,dx$

άρα $\left[\frac{f^4(x)}{4}\right]_0^1+\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_0^1=\left[2xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 (2x)' f(x)\,dx$

$\frac{f^4(1)}{4}-0+\frac{f^2(1)}{2}-0=2f(1)-2\int_0^1 f(x)\,dx$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=2-2E \Leftrightarrow 2E=\frac{1}{4} \Leftrightarrow E=\frac{1}{8}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Άσκηση 1/ Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφ. παράσταση της $f(x)=3x^2-6x$ τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=1$, $x=3$

Άσκηση 2/ Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

α) $f(x)=6xe^{2x}$, τον xx', και την ευθεία $x=1$

β) $f(x)=4x\ln x$, τον xx', και την ευθεία $x=e$.

γ) $f(x)=x-\sqrt{x}$, και τον xx'

δ) $f(x)=xe^{\sqrt{x}}$, τον xx' και την ευθεία $x=1$

Άσκηση 3/ $f(x)=e^x+x-1$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

β) Για $x\in[0,1]$ να βρεθεί το Σ. Τιμών της f.

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα xx', και τις ευθείες $x=0$, $x=e$

Άσκηση 4/ $f(x)=e^x-x-1$

α) Να βρεθεί το πρόσημο της f.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από την C_f, τον xx' και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ με $\lambda>1$

γ) να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$

δ) Αν το λ αυξάνεται με ταχύτητα $3\,cm/sec$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή που το $\lambda=2$

Άσκηση 5/

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4-x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$, $x=\pi$.

(ΥΠΟΔΕΙΞΗ Σχήμα.)

ΑΣΚΗΣΗ 6| Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$

α) Να βρείτε το εμβαδόν E που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $y = 3$

β) Να βρεθεί το α ώστε η ευθεία $y = 3\alpha^2$ να χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΑΣΚΗΣΗ 7| Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,3)$

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη και τον $x'x$.

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη και τον $y'y$

ΑΣΚΗΣΗ 8 $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία τα κοίλα και να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από $C_{f^{-1}}$ τον $x'x$ και την ευθεία $x = 3$

γ) Να δείξετε $f^{-1}(e^x) \geq f^{-1}(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9| Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0$

α) Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της f

β) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$ με $\lambda > 1$

δ) Να υπολογίσετε $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda\sqrt{\lambda}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10| $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$, και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$

β) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το $E(\lambda)$ να γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι το ελάχιστο εμβαδόν

ΑΣΚΗΣΗ 11) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

α) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 4$.

ΑΣΚΗΣΗ 12) Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = x^4 + 2x$, $g(x) = 2x^3 + x^2$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g.

ΑΣΚΗΣΗ 13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$

α) Να βρεθεί η κυρτότητα της f

β) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 στα σημεία $A(1, f(1))$, $B(3, f(3))$

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, ε_1, ε_2.

ΑΣΚΗΣΗ 14) $f(x) = e^x + 2x - 1$

α) Για $x \in [0, 1]$ να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από $C_{f^{-1}}$, xx', $x = 0$, $x = e+1$.

ΑΣΚΗΣΗ 15) $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$.

α) Να βρεθεί η f^{-1}

β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, $C_{f^{-1}}$