ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Α/ Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΝΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)\,dx$

ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΤΡΕΙΣ ΤΡΟΠΟΥΣ:

1) ΜΕ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ
2) ΚΑΤΕΥΘΕΙΑΝ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ
3) ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ.

1 ΚΑΝΟΝΑΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx$$

Με τον κανόνα αυτόν υπολογίζω ολοκληρώματα που έχουν μια από τις επόμενες μορφές:

1) $\int_\alpha^\beta p(x)\, e^{kx+\lambda}\,dx$ όπου $p(x)$ πολυώνυμο.
2) $\int_\alpha^\beta p(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(kx+\lambda)\,dx$
3) $\int_\alpha^\beta p(x)\cdot \eta\mu(kx+\lambda)\,dx$
4) $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot \ln g(x)\,dx$.
5) $\int_\alpha^\beta (kx+\lambda)\cdot f'(x)\,dx$ ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ
6) $\int_\alpha^\beta e^{kx+\lambda}\cdot \eta\mu(\delta x+\varepsilon)\,dx$
7) $\int_\alpha^\beta e^{kx+\lambda}\cdot \sigma\upsilon\nu(\delta x+\varepsilon)\,dx$
8) $\int_\alpha^\beta {\eta\mu \atop \sigma\upsilon\nu}(kx+\lambda)\cdot {\eta\mu \atop \sigma\upsilon\nu}(\delta x+\varepsilon)\,dx$

$\boxed{1^{\eta}\ \text{ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ}}$

$$\int_\alpha^\beta p(x)\, e^{kx+\lambda} = \int_\alpha^\beta p(x)\left(\frac{e^{kx+\lambda}}{k}\right)'dx = \text{κανόνας}.$$

Πχ1 $\int 4x e^{2x}\,dx = \int_0^1 4x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx = \left[4x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (4x)'\frac{e^{2x}}{2}\,dx$

$= [2x e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 2e^{2x}\,dx = [2xe^{2x}]_0^1 - [e^{2x}]_0^1 = (2e-0)-(e-1)$

$= e+1$

Πχ₂ $\int_0^1 4x^2 e^{2x}dx = \int_0^1 4x^2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx = \left[4x^2\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (4x^2)'\frac{e^{2x}}{2}dx$

$= [2x^2e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 4xe^{2x}dx = 2e^2 - \underline{\int_0^1 4xe^{2x}dx}$

$= 2e^2 - \int_0^1 4x\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx = 2e^2 - \left(\left[4x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (4x)'\frac{e^{2x}}{2}dx\right)$

$= 2e^2 - [2xe^{2x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{2x}dx$

$= 2e^2 - [2e^2-0] + [e^{2x}]_0^1 = e^2-1$

$\boxed{\text{2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ}}$ $\int_\alpha^\beta P(x)\cdot\text{συν}(kx+\lambda)dx = \int_\alpha^\beta P(x)\cdot\left(\frac{\text{ημ}(kx+\lambda)}{k}\right)'dx$

$= \left[P(x)\cdot\frac{\text{ημ}(kx+\lambda)}{k}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta P'(x)\cdot\frac{\text{ημ}(kx+\lambda)}{k}dx = \text{κτλ.}$

Πχ $\int_0^\pi 4x\,\text{συν}2x\,dx = \int_0^\pi 4x\cdot\left(\frac{\text{ημ}2x}{2}\right)'dx =$

$= \left[4x\cdot\frac{\text{ημ}2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (4x)'\frac{\text{ημ}2x}{2}dx = [2x\,\text{ημ}2x]_0^\pi - \int_0^\pi 2\,\text{ημ}2x\,dx$

$= [2x\,\text{ημ}2x]_0^\pi - [-\text{συν}2x]_0^\pi = (0-0)+(1-1)=0$

<u>3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u> $\int_\alpha^\beta P(x)\cdot\text{ημ}(kx+\lambda)dx = \int_\alpha^\beta P(x)\cdot\left(-\frac{\text{συν}(kx+\lambda)}{k}\right)'dx$

$= \left[P(x)\cdot\left(-\frac{\text{συν}(kx+\lambda)}{k}\right)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta P'(x)\cdot\left(-\frac{\text{συν}(kx+\lambda)}{k}\right)dx = \text{κτλ.}$

Πχ₁ $\int_0^\pi 6x\,\text{ημ}3x\cdot dx = \int_0^\pi 6x\left(-\frac{\text{συν}3x}{3}\right)dx =$

$= \left[6x\left(-\frac{\text{συν}3x}{3}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (6x)'\left(-\frac{\text{συν}3x}{3}\right)dx = [-2x\,\text{συν}3x]_0^\pi + \int_0^\pi 2\,\text{συν}3x\,dx$

$= [-2x\,\text{συν}3x]_0^\pi + \left[2\frac{\text{ημ}3x}{3}\right]_0^\pi = [2\pi-0]+[0-0]=2\pi$

Πχ₂ $\int_0^\pi(8x^2+4x)\,\text{ημ}2x\cdot dx = \int_0^\pi(8x^2+4x)\left(-\frac{\text{συν}2x}{2}\right)'dx$

$= \left[(8x^2+4x)\cdot\left(-\frac{\text{συν}2x}{2}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi(8x^2+4x)'\cdot\left(-\frac{\text{συν}2x}{2}\right)dx$

$$= \left[(4x^2+2x)\,συν2x\right]_0^\pi + \int_0^\pi (8x+4)\,συν2x\,dx$$

$$= \left(-(4\pi^2+2\pi)\right) + \int_0^\pi (4x+2)\,συν2x\,dx$$

$$= -(4\pi^2+2\pi) + \int_0^\pi (4x+2)\cdot\left(\frac{ημ2x}{2}\right)' dx$$

$$= -(4\pi^2+2\pi) + \left[(4x+2)\frac{ημ2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (4x+2)'\cdot\frac{ημ2x}{2}\,dx$$

$$= -(4\pi^2+2\pi) + \left[(2x+1)\,ημ2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2ημ2x\,dx$$

$$= -(4\pi^2+2\pi) + (0-0) - \left[-συν2x\right]_0^\pi$$

$$= -(4\pi^2+2\pi) + (-1-1) = -(4\pi^2+2\pi+2)$$

4η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot \ln g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (F(x))' \ln g(x)\,dx =$

$$= \left[F(x)\ln g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)\cdot(\ln g(x))'\,dx = κτλ.$$

Πχ1 $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\cdot \ln x\,dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x\,dx =$

$$= \left[-\frac{1}{x^2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot(\ln x)'\,dx =$$

$$= \left[-\frac{\ln 2}{4} - 0\right] + \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\ln 2}{4} + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\ln 2}{4} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{4} + \left[-\frac{1}{2}+1\right] = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{4}$$

Πχ2. $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \int_0^1 (x)'\ln(x+1)\,dx =$

$$= \left[x\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 x(\ln(x+1))'\,dx$$

$$= \left[x\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = (\ln 2 - 0) - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$= \ln 2 - \int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \ln 2 - \left[x-\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \ln 2 - [1-\ln 2 - 0] = 2\ln 2 - 1$$

193

Πχ3. $\int_1^2 \ln^2 x\,dx = \int_1^2 (x)'\ln^2 x\,dx = [x\ln^2 x]_1^2 - \int_1^2 x(\ln^2 x)'dx$
$= 2\ln^2 2 - \int_1^2 x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\ln^2 2 - \int_1^2 2\ln x\,dx$
$= 2\ln^2 2 - 2[x\ln x - x]_1^2 = 2\ln^2 2 - 2(2\ln 2 - 2 + 1)$
$= 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2.$

5η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ | $\int_\alpha^\beta (\kappa x+\lambda) f'(x)dx = [(\kappa x+\lambda)f(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx$

ΓΕΝΙΚΗ

Πχ1 $\int_0^{\pi/4} \frac{2x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\pi/4}(2x+1)\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\pi/4}(2x+1)(\varepsilon\varphi x)'dx$
$= [(2x+1)\varepsilon\varphi x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(2x+1)'\varepsilon\varphi x\,dx =$
$= (\frac{\pi}{2}+1-0) - \int_0^{\pi/4} 2\varepsilon\varphi x\,dx = \frac{\pi}{2}+1-2\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$
$= \frac{\pi}{2}+1-2[-\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}+1+2[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0]$
$= \frac{\pi}{2}+1+2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$

6η; 7η, 8η | ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ | Γίνονται με τον ίδιο τρόπο.

Εφαρμόζω μέθοδο κατά παράγοντες ολοκλήρωση δύο φορές στην ίδια συνάρτηση και καταλήγω. $I = K + \lambda I$ οπότε υπολογίζω το I όπου I το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Πχ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

$I = \int_0^1 e^{2x}\eta\mu 4x\,dx$

ΛΥΣΗ

$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\eta\mu 4x\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\eta\mu 4x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}(\eta\mu 4x)'dx$

$I = \frac{e^2\eta\mu 4}{2} - \int_0^1 2e^{2x}\sigma\upsilon\nu 4x\,dx$. (Πρώτη φορά)

$I = \frac{e^2\eta\mu 4}{2} - \int_0^1 2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\sigma\upsilon\nu 4x\,dx$. (δεύτερη φορά στο ίδιο)

$$I = \frac{e^2 \text{ημ}4}{2} - \left(\left[\frac{2e^{2x}}{2} \text{συν}4x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2e^{2x}}{2} \cdot (\text{συν}4x)' dx \right)$$

$$I = \frac{e^2 \text{ημ}4}{2} - (e^2 \text{συν}4 - 1) + \int_0^1 e^{2x} (-4\,\text{ημ}4x)\, dx$$

$$I = \frac{e^2 \text{ημ}4}{2} - e^2 \text{συν}4 + 1 - 4 \int_0^1 e^{2x} \text{ημ}4x \, dx$$

$$I = \frac{e^2 \text{ημ}4}{2} - e^2 \text{συν}4 + 1 - 4I$$

$$5I = \frac{e^2 \text{ημ}4}{2} - e^2 \text{συν}4 + 1$$

$$I = \frac{1}{5}\left[\frac{e^2 \text{ημ}4}{2} - e^2 \text{συν}4 + 1 \right].$$

$\boxed{2}$ ΚΑΤΕΥΘΕΙΑΝ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ.

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = [F(g(x))]_\alpha^\beta = F(g(\alpha)) - F(g(\beta))}$$

Πx1 $\int_0^1 4x^3 e^{x^4} dx = [e^{x^4}]_0^1 = e - 1.$

Πx2 $\int_0^1 8x\, \text{ημ}(4x^2+2)\, dx = [-\text{συν}(4x^2+2)]_0^1 = -\text{συν}6 + \text{συν}2$

Πx3 $\int_0^\pi x^3 \text{συν}(2x^4)\, dx = \left[\frac{\text{ημ}(2x^4)}{8} \right]_0^\pi = \frac{\text{ημ}2\pi^4}{8}$

Πx4 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[2\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$

Πx5 $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 2$

Πx6 $\int_0^1 e^{x^2 + \ln x} dx = \int_0^1 e^{x^2} \cdot e^{\ln x} dx = \int_0^1 e^{x^2} \cdot x\, dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

Πx7 $\int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x\, dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}.$

Πx8 $\int_0^1 2x(x^2+1)^4 dx = \left[\frac{(x^2+1)^5}{5} \right]_0^1 = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$

3| ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du$$

θέτω $u=g(x)$.
τότε $du = g'(x)\cdot dx$.
για $x=\alpha \rightarrow u=g(\alpha)$
για $x=\beta \rightarrow u=g(\beta)$

ΜΕΘΟΔΟ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΝΩ ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΚΑΤΕΥΘΕΙΑΝ Η' ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ. ΟΠΩΣ.

1| $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot e^{g(x)}\,dx$ θέτω $u=g(x)$.

2| $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot \eta\mu(g(x))\,dx$ θέτω $u=g(x)$.

3| $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu g(x)\,dx$ θέτω $u=g(x)$.

4| $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot \ln g(x)\,dx$ θέτω $u=g(x)$.

5| $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot\sqrt{g(x)}\,dx$ θέτω $u=g(x)$ αν το $f(x)$ είναι περίπου παράγωγος του $g(x)$
ή θέτω $u=\sqrt{g(x)}$

6| $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx$ ομοίως με το 5

7| $\int_{\alpha}^{\beta} (\kappa x+\lambda)^{\mu}\cdot(\delta x+\varepsilon)^{\nu}\,dx$ αν $\mu>\nu$ θέτω $u=\kappa x+\lambda$. αν $\mu<\nu$ θέτω $u=\delta x+\varepsilon$.

8| $\int_{\alpha}^{\beta} f(e^x)\cdot dx$ θέτω $u=e^x$

9| $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\ln x)}{x}\cdot dx$ θέτω $u=\ln x$.

10| $\int_\alpha^\beta f(\eta\mu x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\,dx$. θέτω $u=\eta\mu x$.

11| $\int_\alpha^\beta f(\sigma\upsilon\nu x)\cdot \eta\mu x\,dx$ θέτω $u=\sigma\upsilon\nu x$.

12| Γενικά $\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot h(x)\,dx$ που το $h(x)$ είναι περίπου η παράγωγος του $g(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Πχ1 $I=\int_0^1 x^2 e^{x^3}dx = $ κατευθείαν $=\left[\frac{e^{x^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{e}{3}-\frac{1}{3}$ / αντικατάσταση

Θέτω $u=x^3$

$du=(x^3)'dx$

$du=3x^2dx$

$\frac{du}{3}=x^2\cdot dx$

για $x=0 \Rightarrow u=0$

για $x=1 \Rightarrow u=1$

άρα $I=\int_0^1 e^u\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int_0^1 e^u du=\frac{1}{3}[e^u]_0^1=\frac{e}{3}-\frac{1}{3}$.

Πχ2 $I=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$

Θέτω $u=\sqrt{x}$ ή $u=\sqrt{x}$.

τότε $du=(\sqrt{x})'dx$ | $u^2=x$

$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ | $x=u^2$

$du=\frac{1}{2u}dx$ | $dx=(u^2)'\cdot du$

$dx=2u\cdot du$ | $dx=2u\cdot du$

για $x=1\Rightarrow u=1$

για $x=4\Rightarrow u=2$

άρα $I=\int_1^2 e^u\cdot 2u\,du \overset{\text{κ.π.}}{=} \int_1^2 (e^u)'2u\,du =$

$=[e^u\cdot 2u]_1^2-\int_1^2 e^u\cdot(2u)'du=[e^u 2u]_1^2-\int_1^2 2e^u du$

$=[e^u\cdot 2u]_1^2-[2e^u]_1^2=(4e^2-2e)-(2e^2-2e)=2e^2$.

197

$\boxed{\Pi X_3}$ $I=\int_0^{\pi} 4x\cdot \eta\mu(x^2+2)dx$

Θέτω $u=x^2+2$ για $x=0 \Rightarrow u=2$

$du=(x^2+2)'dx$ για $x=\pi \Rightarrow u=\pi^2+2$

$du=2x\,dx$

$2du=4x\,dx$

άρα $I=\int_2^{\pi^2+2} 2\eta\mu u\,du = \left[-2\sigma\upsilon\nu u\right]_2^{\pi^2+2} = -2\sigma\upsilon\nu(\pi^2+2)+2\sigma\upsilon\nu 2$

$\boxed{\Pi X_4}$ $I=\int_0^1 4x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Θέτω $u=x^2+1$ για $x=0 \Rightarrow u=1$

$du=2x\,dx$ για $x=1 \Rightarrow u=2$

άρα $I=\int_1^2 2\sqrt{u}\,du = \int_1^2 2u^{\frac{1}{2}}du = \left[\frac{2u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2$

$= \left[\frac{2u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \left[\frac{4}{3}u^{3/2}\right] = \frac{4}{3}\cdot\left(2^{3/2}-2^1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{8}-2\right)$

$\boxed{\Pi X_5}$ $I=\int_0^3 \frac{4x}{\sqrt{x+1}}$ Θέτω $u=\sqrt{x+1} \Rightarrow u^2=x+1$

$x=u^2-1$ τότε $dx=(u^2-1)'du$

$dx=2u\,du$

για $x=0 \Rightarrow u=1$

για $x=3 \Rightarrow u=2$

άρα $I=\int_1^2 \frac{4(u^2-1)}{u}du = \int_1^2\left(\frac{4u^2}{u}-\frac{4}{u}\right)du = \int_1^2\left(4u-\frac{4}{u}\right)du$

$=\left[2u^2-4\ln u\right]_1^2 = (8-4\ln 2)-(2-0) = 6-4\ln 2$

$\boxed{\Pi X_6}$ $I=\int_1^2 (2x+4)^2(x-1)^3dx$

Θέτω $u=x-1 \Leftrightarrow x=u+1$

άρα $du=dx$

για $x=1 \Rightarrow u=0$ για $x=2 \Rightarrow u=1$

άρα $I=\int_0^1 \left(2(u+1)+4\right)^2 \cdot u^3 du = \int_0^1 (2u+6)^2 u^3 du$.

$= \int_0^1 (4u^2+24u+36)u^3 du = \int_0^1 (2u^5+24u^4+36u^3) du$.

$= \left[\frac{2u^6}{6}+\frac{24u^5}{5}+9u^4\right]_0^1 = \frac{2}{6}+\frac{24}{5}+9$.

$\boxed{\Pi X_7}$ $I=\int_0^1 \frac{e^{3x}-4e^{2x}+3e^x}{e^x-1}dx$.

Θέτω $u=e^x$ τότε $du=(e^x)'dx \Leftrightarrow du=e^x dx \Leftrightarrow du=u dx \Leftrightarrow$
$dx=\frac{du}{u}$. για $x=0 \Rightarrow u=1$
για $x=1 \Rightarrow u=e$.

άρα $I=\int_1^e \frac{u^3-4u^2+3u}{u-1}\cdot\frac{du}{u} = \int_1^e \frac{(u^2-4u+3)\cancel{u}}{(u-1)\cancel{u}}du$.

$= \int_1^e \frac{\cancel{(u-1)}(u-3)}{\cancel{u-1}}du = \left[\frac{u^2}{2}-3u\right]_1^e = \frac{e^2}{2}-3e+\frac{5}{2}$.

$\boxed{\Pi X_8}$ $I=\int_1^e \frac{\ln^2 x-3\ln x+5}{x(\ln x+1)}dx$.

Θέτω $u=\ln x$. τότε $du=\frac{1}{x}\cdot dx$.
για $x=1 \Rightarrow u=0$
για $x=e \Rightarrow u=1$.

άρα $I=\int_0^1 \frac{u^2-3u+5}{u+1}du = \int_0^1 \frac{(u+1)(u-4)+9}{u+1}du$.

$= \int_0^1 \left(\frac{(u+1)(u-4)}{u+1}+\frac{9}{u+1}\right)du$

$\left(\begin{array}{l|l} u^2-3u+5 & u+1 \\ -u^2-u & u-4 \\ \quad -4u+5 & \\ \quad +4u+4 & \\ \quad\quad 9 & \end{array}\right)$

$= \int \left(u-4+\frac{2}{u+1}\right)du$

$= \left[\frac{u^2}{2}-4u+2\ln(u+1)\right]_0^1 = -\frac{7}{2}+2\ln 2$.

$\underline{\Pi X_9}$ Να δείξετε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$

$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx = \int_\beta^\alpha f(u)\cdot(-du) = \int_\alpha^\beta f(u)du = \int_\alpha^\beta f(x)dx$

θέτω $u=\alpha+\beta-x$ τότε $du=-dx$
για $x=\alpha \Rightarrow u=\beta$, για $x=\beta \Rightarrow u=\alpha$.

Β) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

ΤΥΠΟΙ ΑΠΟ Β. ΛΥΚΕΙΟΥ.

1) $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

2) $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x$

3) $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 x$

4) $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

5) $1 + \varepsilon\varphi^2 x =$

1) $\int_\alpha^\beta \eta\mu x\, dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_\alpha^\beta = -\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha$

2) $\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu x\, dx = [\eta\mu x]_\alpha^\beta = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$.

3) $\int_0^{\pi/3} \varepsilon\varphi x\, dx = [-\ln\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/3} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

4) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sigma\varphi x\, dx = [\ln(\eta\mu x)]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$

5) $\int_0^\pi \eta\mu^2 x\, dx = \int_0^\pi \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right) dx =$

$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

6) $\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx = \int_0^\pi \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right) dx =$

$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

7) $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^2 x\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1\right) dx = [\varepsilon\varphi x - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

8) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sigma\varphi^2 x\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x} dx =$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1\right) dx = [-\sigma\varphi x - 1]_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) - (-1-1) = 2 - \frac{\pi}{2}$

9) $I = \int_0^{\pi/2} \eta\mu^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)\, \eta\mu x\, dx$

θέτω $u = \sigma\upsilon\nu x$ τότε $du = (\sigma\upsilon\nu x)' dx \Rightarrow du = -\eta\mu x\, dx$

για $x=0$ είναι $u=1$.
για $x=\pi/2$ είναι $u=0$.
άρα $I=\int_1^0 (1-u^2)\cdot(-du) = \int_0^1 (1-u^2)\,du = \left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

10) $\int_0^{\pi/2} συν^3x\,dx$ = ομοίως.

11) $I=\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{ημx}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{ημx}{ημ^2x}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1-συν^2x}\cdot ημx\,dx$.
Θέτω $u=συνx$ τότε $du=-ημx\cdot dx$.
για $x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow u=\frac{1}{2}$ και για $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$
άρα $I=\int_{1/2}^0 \frac{1}{1-u^2}(-du) = \int_{1/2}^0 \frac{1}{u^2-1}\,du = \int_{1/2}^0 \left(\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}\right)du$.
$= \left[A\ln|u-1| + B\ln|u+1|\right]_{1/2}^0$
υπολογίζω τα A, B.
πρέπει $\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1} = \frac{1}{u^2-1} \Leftrightarrow A(u+1)+B(u-1)=1 \Leftrightarrow$
$Au+A+Bu-B=1 \Leftrightarrow (A+B)u+(A-B)=1$. άρα έπεται
$\left.\begin{matrix}A+B=0\\A-B=1\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}A=-B\\A+A=1\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}B=-\frac{1}{2}\\A=\frac{1}{2}\end{matrix}$
άρα $I=\left[\frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1|\right]_{1/2}^0 = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 3$

12) $I=\int_0^{\pi/3} \frac{1}{συνx}\,dx$ ομοίως.

13) $\int_0^{\pi} 4x\,ημ^2x\,dx = \int_0^{\pi} 4x\,\frac{1-συν2x}{2}\,dx = \int_0^{\pi}(2x - 2x\,συν2x)\,dx$
$= \int_0^{\pi} 2x\,dx - \int_0^{\pi} 2x\,συν2x\,dx = \left[x^2\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\left(\frac{ημ2x}{2}\right)'dx$
$= \pi^2 - \left(\left[x\,ημ2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(2x)'\frac{ημ2x}{2}\,dx\right)$.
$= \pi^2 - 0 + \int_0^{\pi} ημ2x\,dx = \pi^2 + \left[-\frac{συν2x}{2}\right]_0^{\pi}$.
$= \pi^2 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \pi^2$.

201

15) $I=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4x}{\eta\mu^2 x}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}4x\cdot\frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}4x\cdot(-\sigma\varphi x)'\,dx$

$=\left[-4x\,\sigma\varphi x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}+\int_{\pi/6}^{\pi/2}(4x)'\,\sigma\varphi x\,dx$

$=\left[-4x\,\sigma\varphi x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}+\int_{\pi/6}^{\pi/2}4\,\sigma\varphi x\,dx=\left[-4x\,\sigma\varphi x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}+\left[4\ln(\eta\mu x)\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$

$=$ κλπ.

16) $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu^3 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\eta\mu^2 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x\,dx$

$=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x\,dx$. Θέτω $u=\sigma\upsilon\nu x$

οπότε $du=-\eta\mu x\,dx$.

για $x=0 \Rightarrow u=1$

για $x=\pi/2 \Rightarrow u=0$.

άρα $I=\int_1^0\frac{1-u^2}{2+u}(-du)=\int_1^0\frac{u^2-1}{u+2}\,du=\int_1^0\frac{(u-2)(u+2)+3}{u+2}$

$$\begin{array}{r|l} u^2-1 & u+2 \\ \hline -u^2-2u & u-2 \\ -2u-1 & \\ +2u+4 & \\ 3 & \end{array}$$

$I=\int_1^0\left(u-2+\frac{3}{u+2}\right)du$

$=\left[\frac{u^2}{2}-2u+3\ln(u+2)\right]_1^0$

$=3\ln 2+\frac{3}{2}-3\ln 3.$

17) $I=\int_0^{\pi/6}\frac{\eta\mu^3 x-3\eta\mu x+2}{\eta\mu x-1}\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx.$ Θέτω $u=\eta\mu x$

$du=\sigma\upsilon\nu x\,dx$

για $x=0 \Rightarrow u=0$

για $x=\pi/6 \Rightarrow u=1/2$

άρα $I=\int_0^{1/2}\frac{u^3-3u+2}{u-1}\,du=\int_0^{1/2}\frac{(u-1)(u^2+u-2)}{u-1}\,du$

1	0	-3	2	ρ=1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

$=\left[\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-2u\right]_0^{1/2}=-\frac{20}{24}$

Γ] ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)\,dx = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} u f'(u)\,du$$

θέτω $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u)$ τότε $dx = f'(u)\,du$.

πχ.] $f(x) = x^3 + x - 1$.
Να υπολογίσετε $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)\,dx$.
π.ορ της f είναι $A = \mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1
άρα έχει αντίστροφη η οποία δεν υπολογίζεται.

άρα $I = \int_{-1}^{1} f^{-1}(x)\,dx$ θέτω $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u)$.
$dx = f'(u)\,du = (3u^2+1)\,du$
για $x = -1$ είναι $-1 = f(u) \Leftrightarrow f(0) = f(u) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} 0 = u$.
για $x = 1$ είναι $1 = f(u) \Leftrightarrow f(1) = f(u) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} 1 = u$.

άρα $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 u f'(u)\,du = \int_0^1 u(3u^2+1)\,du$

$= \int_0^1 (3u^3 + u)\,du = \left[\frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

Δ] ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΙΚΛΑΔΗΣ.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{αν } x \le 1 \\ xe^{x^2} + 3x - e. & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Εξετάζω αν η f είναι συνεχής στο $[0,2]$
για $x < 1$ είναι συνεχής.
για $x > 1$ είναι συνεχής
Εξετάζω στο 1.

$f(1) = 3$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3.$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3.$

άρα η f συνεχής και στο $x_0 = 1$.

άρα η f συνεχής στο $[0,2]$.

οπότε $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$.

$= \int_0^1 3x^2\,dx + \int_1^2 (xe^{x^2} + 3x - e)\,dx$

$= [x^3]_0^1 + \left[\frac{e^{x^2}}{2} + \frac{3x^2}{2} - ex\right]_1^2 = 1 + \left(\frac{e^4}{2} + 6 - 2e - \frac{e}{2} - \frac{3}{2} + e\right)$

$= \frac{e^4}{2} + \frac{11}{2} - e.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ.

1| $\boxed{\text{ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ}}$

Αν $I_\nu = \int_0^2 x^\nu e^x\,dx$ $\nu \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε $\boxed{I_\nu = 2^\nu e^2 - \nu I_{\nu-1}}$ (1)

και να υπολογίσετε I_1, I_2, I_3

Είναι $I_\nu = \int_0^2 x^\nu (e^x)'\,dx = [x^\nu e^x]_0^2 - \int_0^2 (x^\nu)' e^x\,dx$

$= x^\nu e^2 - \int_0^2 \nu x^{\nu-1} e^x\,dx = x^\nu e^2 - \nu \int_0^2 x^{\nu-1}\,dx = 2^\nu e^2 - \nu I_{\nu-1}$

Είναι $I_1 = \int_0^2 x e^x\,dx = \int_0^2 x (e^x)'\,dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 x' e^x\,dx$

$= 2e^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$

για $\nu = 2$ στο τύπο (1) έχω $I_2 = 2^2 \cdot e^2 - 2I_1 = 4e^2 - 2(e^2+1)$
$= 2e^2 - 2.$

για $\nu = 3$ στο τύπο (1) έχω $I_3 = 2^3 e^2 - 2I_2 = 8e^2 - (2e^2 - 2) = 6e^2 + 2$

2| Αν η f άρτια να δείξετε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$.

ΛΥΣΗ

Αφού η f άρτια τότε $f(x) = f(-x)$

τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

Αφού

$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx \overset{f \text{ άρτια}}{=} \int_{-\alpha}^{0} f(-x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} f(u)(-du) = \int_0^{\alpha} f(u)\,du = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

θέτω $u = -x$ τότε $du = -dx$

για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$ για $x = 0 \Rightarrow u = 0$

2011

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα.

1) α) $\int_0^1 6x e^{3x}\,dx$ β) $\int_0^1 8x^2 e^{2x}\,dx$

2) α) $\int_0^{\pi} 2x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$ β) $\int_0^{\pi} 4x^2\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

3) α) $\int_0^{\pi} 4x\,\eta\mu 2x\,dx$ β) $\int_0^{\pi} x^2\,\eta\mu x\,dx$.

4) α) $\int_1^2 (x^2+4)\ln x\,dx$ β) $\int_1^2 2x\ln^2 x\,dx$ γ) $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

5) α) $\int_0^{\pi/4} \frac{6x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$ β) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{-4x}{\eta\mu^2 x}\,dx$.

6) α) $\int_0^1 e^{2x}\,\eta\mu x\,dx$ β) $\int_0^1 e^{x}\,\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$ γ) $\int_0^{\pi} \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$.

7) α) $\int_0^1 3x^2 e^{x^3}\,dx$. β) $\int_0^1 2x\,\sigma\upsilon\nu(x^2)\,dx$ γ) $\int_0^1 8x\cdot\eta\mu(x^2)\,dx$

δ) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ ε) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ στ) $\int_0^1 x(x^2+4)^3\,dx$

8) α) $\int_0^1 x^3 e^{x^4+2}\,dx$. β) $\int_0^1 \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$ γ) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,e^{1/x}\,dx$.

9) α) $\int_0^1 \eta\mu\sqrt{x}\,dx$. β) $\int_0^1 4x\,\sigma\upsilon\nu(x^2+2)\,dx$. γ) $\int_0^1 \sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\,dx$.

10) β) $\int_0^1 x\sqrt{x+4}\,dx$. β) $\int_0^1 4x\sqrt{x^2+1}\,dx$. γ) $\int_1^3 \frac{4x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

11) α) $\int_0^1 \frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{x}+2}\,dx$. β) $\int_0^1 \frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{x}-2}\,dx$ γ) $\int_0^1 \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\,dx$.

12) α) $\int_1^e \frac{\ln^2 x-4\ln x+3}{x(\ln x-1)}\,dx$. β) $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

13) α) $\int_0^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{2-\eta\mu x}\,dx$ β) $\int_0^{\pi/2} \frac{\varepsilon\varphi x}{2-\sigma\upsilon\nu x}\,dx$.

14| α) $\int_0^{\pi} συν^3x\,dx$. β) $\int_0^{\pi/4} εφ^3x\,dx$ γ) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{συνx}dx$

15| α) $\int_0^{\pi} 4x\,συν^2x\,dx$ β) $\int_0^{\pi/4}(εφ^3x + εφx)\,dx$

16| $f(x) = e^x + x - 1$

α) Να δείξετε ότι έχει αντίστροφη.

β) Να υπολογίσετε $\int_0^{e} f^{-1}(x)\,dx$.

17| $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x<0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ Να υπολογίσετε το $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

18| $f(x) = \begin{cases} εφ^2x & αν\ -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ xημx & αν\ x \geq 0 \end{cases}$ Να υπολογίσετε το $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx$.

19| Να δείξετε: $\int_0^1 x^2 f''(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$.

20| Αν $g(\pi)=1$ και $\int_0^{\pi}[g(x)+g''(x)]ημx\,dx = 13$ να υπολογ. το $g(0)$

21| Αν $I_ν = \int_1^e \ln^ν x\,dx$ $ν \in N^*$ τότε να δείξετε $I_ν = e - ν\cdot I_{ν-1}$, $ν \geq 2$. Και να υπολογίσετε I_1, I_2, I_3.

22| α) Αν η f είναι περιττή να δείξετε ότι: $\int_{-α}^{α} f(x)\,dx = 0$.

β) αν $f(x) = \frac{ημ^3x}{x^2+4}$ να δείξετε $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,dx = 0$

23| $I_α = \int_0^{α} x^2e^x\,dx$.

α) Να υπολογίσετε $I_α$.

β) Να υπολογίσετε $\lim_{α\to+\infty} I_α$, $\lim_{α\to-\infty} I_α$