ΜΑΘΗΜΑ 51
ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε παράγουσα της f ή αρχική συνάρτηση μια συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x)$$

Σχόλιο/ κάθε συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα συνάρτηση σε αυτό

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F μια παράγουσα της f στο Δ. τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$. είναι παράγουσες της f στο Δ
- κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$.

Το θεώρημα ισχύει μόνο για διάστημα Δ και όχι ένωση διαστημ.

Πχ1. Έστω $f(x)=3x^2-\eta\mu x+2e^x$, $x\in R$ τότε.
μια παράγουσα της f είναι $F(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu x+2e^x$, $x\in R$
επίσης είναι και $G_1(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu x+2e^x+5$, $x\in R$
και $G_2(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu x+2e^x-10$, $x\in R$
και γενικά κάθε συνάρτηση $G(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu x+2e^x+c$, $x\in R$
όπου c ένας πραγμ. αριθμός

Πχ2. Αν $f(x)=4x^3\eta\mu x+x^4\sigma\upsilon\nu x$, $x\in R$
να βρεθεί η παράγουσα της f έστω η F τέτοια ώστε $F(0)=2015$

Είναι $F(x)=x^4\cdot\eta\mu x+c$ αφού
$F'(x)=(x^4\cdot\eta\mu x+c)' = 4x^3\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x = f(x)$, $x\in R$
και αφού $F(0)=2015 \Rightarrow 0+c=2015 \Rightarrow c=2015$
άρα $F(x)=x^4\eta\mu x+2015$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ f ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ Δ.

1) $f(x) = 0,\ x \in R$ $\quad F(x) = c$.
2) $f(x) = 1,\ x \in R$ $\quad F(x) = x + c$.
3) $f(x) = \alpha,\ x \in R$ $\quad F(x) = \alpha x + c$.
4) $f(x) = x,\ x \in R$ $\quad F(x) = \frac{x^2}{2} + c$.
5) $f(x) = \alpha x,\ x \in R$ $\quad F(x) = \alpha \frac{x^2}{2} + c$.
6) $f(x) = x^\alpha,\ x \in R,\ \alpha \neq -1$. $\quad F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$.
7) $f(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$ $\quad F(x) = \ln x + c$.
8) $f(x) = 1/x,\ x \neq 0$ $\quad F(x) = \ln|x| + c$.
9) $f(x) = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$ $\quad F(x) = 1/x + c$.
10) $f(x) = e^x,\ x \in R$ $\quad F(x) = e^x + c$.
11) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x > 0$ $\quad F(x) = 2\sqrt{x} + c$.
12) $f(x) = ημx,\ x \in R$ $\quad F(x) = -συνx + c$.
13) $f(x) = συνx,\ x \in R$ $\quad F(x) = ημx + c$.
14) $f(x) = εφx,\ εφx > 0$ $\quad F(x) = -\ln(συνx) + c$.
15) $f(x) = σφx,\ σφx > 0$ $\quad F(x) = \ln(ημx) + c$.
16) $f(x) = \frac{1}{συν^2 x}$. $\quad F(x) = εφx + c$.
17) $f(x) = \frac{1}{ημ^2 x}$ $\quad F(x) = -σφx + c$.
18) $f(x) = \ln x \quad x > 0$ $\quad F(x) = x\ln x - x + c$.
19) $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad x > 0$ $\quad F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + c$.
20) $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad x > 1$ $\quad F(x) = \ln(\ln x) + c$.
21) $f(x) = \alpha^x,\ \alpha > 0,\ x \in R$ $\quad F(x) = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$.

ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ· ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ Δ.

1) $f(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \rightarrow F(x) = g(x)h(x) + c.$

2) $f(x) = \dfrac{g'(x)h(x) + g(x)h'(x)}{h^2(x)} \rightarrow F(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} + c.$

3) $f(x) = g(x) \cdot g'(x) \rightarrow F(x) = \dfrac{g^2(x)}{2} + c.$

4) $f(x) = g^{\nu}(x) \cdot g'(x) \rightarrow F(x) = \dfrac{g^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c.$

5) $f(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}, \ (g(x) > 0) \rightarrow F(x) = \ln g(x) + c.$

6) $f(x) = \dfrac{g'(x)}{g^2(x)} \rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{g(x)} + c.$

7) $f(x) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}, \ (g(x) > 0) \rightarrow F(x) = 2\sqrt{g(x)} + c.$

8) $f(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \rightarrow F(x) = e^{g(x)} + c.$

9) $f(x) = g'(x) \cdot \text{ημ}\, g(x) \rightarrow F(x) = -\text{συν}\, g(x) + c.$

10) $f(x) = g'(x) \cdot \text{συν}\, g(x) \rightarrow F(x) = \text{ημ}\, g(x) + c.$

11) $f(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \rightarrow F(x) = g(h(x)) + c.$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΤΗΣ } f(x) = g(\alpha x + \beta) \\ \text{είναι } F(x) = \dfrac{G(\alpha x+\beta)}{\alpha} + c. \end{array}}$$

Παραδείγματα.

$f(x) = \text{συν}(3x+5) \rightarrow F(x) = \dfrac{\text{ημ}(3x+5)}{3} + c.$

$f(x) = e^{4x+8} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{4x+8}}{4} + c.$

$f(x) = \text{ημ}\, 10x \rightarrow F(x) = \dfrac{-\text{συν}\, 10x}{10} + c.$

$f(x) = \frac{5}{3x+4} \rightarrow F(x) = 5\frac{\ln|3x+4|}{3} + c.$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+6}} \rightarrow F(x) = \frac{2\sqrt{5x+6}}{5} + c.$

$f(x) = (3x+4)^4 \rightarrow F(x) = \frac{(3x+4)^5}{5 \cdot 3} + c.$

$f(x) = ημ2x + e^{2x} - \frac{1}{\sqrt{4x+2}} \Rightarrow F(x) = \frac{-συν2x}{2} + \frac{e^{2x}}{2} - 2\sqrt{4x+2} + c.$
$x > -\frac{1}{2}$

$f(x) = 4x\, ημ(x^2+6) \rightarrow F(x) = -2συν(x^2+6) + c.$

$f(x) = x e^{x^2+4} \rightarrow F(x) = \frac{e^{x^2+4}}{2} + c.$

$f(x) = (x^2+6x+2)\cdot(2x+6) \rightarrow F(x) = \frac{(x^2+6x+2)^2}{2} + c.$

$f(x) = 2x\, ημx + x^2 συνx \rightarrow F(x) = (x^2 ημx) + c.$

$f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0 \rightarrow F(x) = \frac{\ln x}{x} + c.$

$f(x) = e^{x^3+\ln x^2} = e^{x^3}\cdot e^{\ln x^2} = e^{x^3}\cdot x^2 \rightarrow F(x) = \frac{e^{x^3}}{3} + c.$

$f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4},\ x>0 \rightarrow F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c.$

$f(x) = x^{3/5},\ x>0 \rightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{8/5}}{8/5} + c = \frac{5}{8}x^{8/5} + c.$

$f(x) = \sqrt[5]{x^3}\ (x>0) = x^{3/5} \rightarrow F(x) = \frac{x^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{5}{8}x^{8/5} + c.$

ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ·

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΤΑΝ Ο ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΟΝΥΜΟ·

$$f(x) = \frac{x^3-4x^2+2x+6}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = x - 4 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}.$$

Τότε $F(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + \ln|x| - \frac{6}{x} + C.$

ομοίως κάνω και όταν ο παρονομαστής είναι ρίζα.

$$f(x) = \frac{x^2-3x+6}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{1/2}} - \frac{3x}{x^{1/2}} + \frac{6}{\sqrt{x}} = x^{3/2} - 3x^{1/2} + \frac{6}{\sqrt{x}}$$

Τότε $F(x) = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 3\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + 12\sqrt{x} = \frac{2}{5}x^{5/2} - 2x^{3/2} + 12\sqrt{x} + C.$

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΤΑΝ Ο ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΠΟΥ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ·

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5} \rightarrow F(x) = \ln|x^2+x+5| + C.$$

$$f(x) = \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+2} \rightarrow F(x) = \frac{\ln(x^4+x^2+2)}{2} + C.$$

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\kappa x+\lambda}$ (κάνω διαίρεση.)

πχ1. $f(x) = \frac{4x+5}{x+2} = \frac{4(x+2)-3}{x+2} = \frac{4(x+2)}{x+2} - \frac{3}{x+2} = 4 - \frac{3}{x+2}.$

$$\begin{array}{r|l} 4x+5 & x+2 \\ \hline -4x-8 & 4 \\ -3 & \end{array}$$

άρα $F(x) = 4x - 3\ln|x+2| + C.$

πχ2 $f(x) = \frac{5x+3}{2x+1} = \frac{\frac{5}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{2x+1} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$

$$\begin{array}{r|l} 5x+3 & 2x+1 \\ \hline -5x-\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \end{array}$$

$F(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$

4η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ/ $f(x) = \frac{P(x)}{\alpha x+\beta}$ (κάνω διαίρεση)

$$f(x) = \frac{x^3-4x+2}{x+3} = \frac{(x+3)(x^2-3x+5)-13}{x+3} = x^2-3x+5-\frac{13}{x+3}.$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x+2 & x+3 \\ \hline -x^3-3x^2 & x^2-3x+5 \\ \hline -3x^2-4x+2 & \\ 3x^2+9x & \\ \hline 5x+2 & \\ -5x-15 & \\ \hline -13 & \end{array}$$

άρα $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x - 13\ln|x+3| + C$

5η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ/ $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x^2+\delta x+\varepsilon}$ (με τον παρονομαστή να παραγοντοποιείται)

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-5x+6} = \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

υπολογίζω τα A, B πρέπει $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x-2) + B(x-3) = 3x+1 \Leftrightarrow Ax-2A+Bx-3B = 3x+1.$

$\Leftrightarrow (A+B)x + (-2A-3B) = 3x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. οπότε.

$$\left.\begin{array}{l} A+B=3 \\ -2A-3B=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2A+2B=6 \\ -2A-3B=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B=-7 \\ A=-4 \end{array}$$

άρα $f(x) = \frac{-4}{x-3} + \frac{-7}{x-2}$ οπότε $F(x) = -4\ln|x-3| - 7\ln|x-2| + C$.

6η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ. $f(x) = \frac{P(x)}{\gamma x^2+\delta x+\varepsilon}$. όπου $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού ≥ 2.

κάνω διαίρεση και στη συνέχεια έχω την περίπτωση 5.

$$f(x) = \frac{x^3+2x+5}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)+6x+5}{x^2-4} = x + \frac{6x+5}{x^2-4} =$$

$$= x + \frac{6x+5}{(x-2)(x+2)} = x + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x+5 & x^2-4 \\ \hline -x^3+4x & x \\ \hline 6x+5 & \end{array}$$

άρα $F(x) = \frac{x^2}{2} + A\ln|x-2| + B\ln|x+2| + C.$

υπολογίζω τα A, B κτλ. όπως 5η.

181.

<u>7η.</u> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(x-\rho)^2}$.

$$f(x) = \frac{2x+8}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2)+12}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{12}{(x-2)^2} =$$

$= \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{12}{(x-2)^2}$ οπότε $F(x) = \ln|x-2| - \dfrac{12}{x-2} + c.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

ΝΑ ΒΡΕΘΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

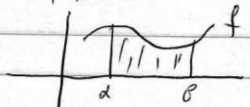
1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6x + 2$
2) $f(x) = x^2 - 2\text{συν}x + \text{ημ}x$
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4\ln x + 2$
4) $f(x) = \text{ημ}(5x+4) + \text{συν}(2x+1)$
5) $f(x) = \frac{1}{4x+2} - \frac{1}{x-2}$
6) $f(x) = e^{2x} - e^{4x+1} + 2$
7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
8) $f(x) = 8(2x+3)^3 + 12(4x-1)^2$.
9) $f(x) = 4x^3\text{ημ}x + x^4\text{συν}x$
10) $f(x) = e^x(3x^2 + x^3)$
11) $f(x) = 3\text{ημ}^2x \cdot \text{συν}x$.
12) $f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$
13) $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$
14) $f(x) = 8x\,e^{4x^2+2}$
15) $f(x) = x \cdot e^{x^2+1}$
16) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{x^2}$
17) $f(x) = \frac{x^2+4x-1}{\sqrt{x}}$
18) $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$
19) $f(x) = \frac{3x+5}{2x+1}$
20) $f(x) = \frac{2x+10}{(x-1)^2}$
21) $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$
22) $f(x) = \frac{x^2+5x+2}{x^2-1}$.

ΜΑΘΗΜΑ 52

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $\Delta=[\alpha,\beta]$.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι το $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\Delta x\cdot \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\right)$

και όταν η $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.



$E=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ όταν $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$.

Επειδή ο παραπάνω τύπος με το όριο είναι δύσκολο να εφαρμοστεί στην πράξη τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με το

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = [F(x)]_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha)$$

όπου $F(x)$ μια παράγουσα της f.

Πχ1. $\int_0^1 (3x^2+2x+4)dx = [x^3+x^2+4x]_0^1 = (1^3+1^2+4)-(0^3+0^2+0)=6$.

Πχ2 $\int_0^1 2xe^{x^2}dx = [e^{x^2}]_0^1 = e-1$.

Πχ3 $\int_0^\pi ημ4x\,dx = \left[-\frac{συν4x}{4}\right]_0^\pi = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$

Πχ4 $\int_0^1 \frac{4x+5}{x+2}dx = \int_0^1 \frac{4(x+2)-3}{x+2}dx = \int_0^1\left(4-\frac{3}{x+2}\right)dx = [4x-3\ln(x+2)]_0^1$
$= 4-3\ln 3+3\ln 2$

Πχ5 $\int_0^1 e^{4x+2}dx = \left[\frac{e^{4x+2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^6-e^2}{2}$.

Πχ6 $\int_0^1 (2x+3)^3dx = \left[\frac{(2x+3)^4}{4\cdot 2}\right]_0^1 = \frac{5^4}{8}-\frac{3^4}{8}$

Πχ 7. $\int_0^{\pi}(3x^2\eta\mu x + x^3\sigma\upsilon\nu x)dx = \int_0^{\pi}(x^3\eta\mu x)' dx = [x^3\eta\mu x]_0^{\pi} = 0$.

Πχ 8. $\int_1^{e}\frac{1-\ln x}{x^2}dx = \int_1^{e}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = \left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^{e} = \frac{1}{e}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1) $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

2) $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$

3) $\int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx = \kappa\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx$

4) $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

5) $\int_\alpha^\beta \kappa f(x)+\lambda g(x)\,dx = \kappa\int_\alpha^\beta f(x)dx + \lambda\int_\alpha^\beta g(x)dx$

6) $\int_\alpha^\beta \kappa\, dx = \kappa(\beta-\alpha)$

7) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$. αρκεί η f συνεχής στα αντίστοιχα διαστήματα.

8) Αν $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

9) Αν $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ και δεν είναι η μηδενική συνάρτηση τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

10) $\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f(x)\geq 0 \text{ στο } [\alpha,\beta] \\ \text{και } \int_\alpha^\beta f(x)dx = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)=0$ στο $[\alpha,\beta]$.

11) Αν $f(x)\geq g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε και $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$

12) Αν $f(x)\geq g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για μερικές τιμές του x τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

13) Αν $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta g(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta h(x)dx$

185 1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

1) Να υπολογίσετε την παράσταση.

$$I = \int_{10}^{20} \eta\mu^2 x\,dx - \int_{20}^{10} \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \int_{10}^{20} \eta\mu^2 x\,dx + \int_{10}^{20} \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx =$$

$$= \int_{10}^{20} (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)\,dx = \int_{10}^{20} 1\,dx = 1(20-10) = 10.$$

2) $$I = \int_0^{2015} \frac{2x^3}{x^3+1}\,dx - \int_{2015}^{0} \frac{2}{x^3+1}\,dx = \int_0^{2015} \frac{2x^3}{x^3+1}\,dx + \int_0^{2015} \frac{2}{x^3+1}\,dx$$

$$= \int_0^{2015} \frac{2x^3+2}{x^3+1}\,dx = \int_0^{2015} \frac{2(x^3+1)}{x^3+1}\,dx = \int_0^{2015} 2\,dx = 2(2015-0) = 4030$$

3) Αν $\int_2^0 f(x)dx = 2$ και $\int_2^5 f(x)dx = 4$ και $\int_5^{10} f(x)dx = 8$

Να υπολογίσετε α) $\int_0^2 f(x)dx$ β) $\int_0^{10} f(x)dx$.

α) $\int_0^2 f(x)dx = -\int_2^0 f(x)dx = -2$

β) $\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx + \int_5^{10} f(x)dx = -2+4+8 = 10$

4) Για να δείξω $\int_\alpha^\beta f(x)dx > k$.

βρίσκω το ακρότατο της f στο $[\alpha,\beta]$ έστω ε = ελάχιστο τότε $f(x) \geq \varepsilon$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και αφού το ίσον ισχύει μόνο για μια τιμή του x τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx > k(\beta-\alpha) = \lambda.$$

Πχ Να δείξετε $\int_{-2}^{4} e^{x^2}dx > 6$.

Έστω $f(x) = e^{x^2}, x \in R$ τότε $f'(x) = 2xe^{x^2}, x \in R$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	ΟΕ	↗

η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 1$

οπότε $f(x) \geq 1$ άρα

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx > \int_{-2}^{4} 1\,dx \Rightarrow \int_2^4 e^{x^2} > 1\cdot(4+2) = 6$$

(5) Για να δείξω $k < \int_\alpha^\beta f(x)dx < \lambda$.

Βρίσκω το σύνολο τιμών της f στο $[\alpha,\beta]$ έστω $[\varepsilon, M]$ τότε $\varepsilon \le f(x) \le M$. και το ίσον ισχύει μόνο για τα άκρα. οπότε $\int_\alpha^\beta \varepsilon\, dx < \int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta M\, dx$

$\Rightarrow k < \int_\alpha^\beta f(x)dx < \lambda$

Πχ. Να δείξετε $e < \int_1^2 e^{x^2} dx < e^4$.

Έστω $f(x) = e^{x^2}, x \in R$ τότε $f'(x) = 2xe^{x^2}, x \in R$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

για $x \in [1,2]$ η f συνεχής και $\nearrow$ οπότε. Σύνολο τιμών $[f(1), f(2)] = [e, e^4]$

άρα $e \le f(x) \le e^4$ και αφού το ίσον δεν ισχύει παντού τότε $\int_1^2 e\, dx < \int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 e^4 dx \Rightarrow$

$e(2-1) < \int_1^2 e^{x^2}dx < \int_1^2 e^4(2-1) \Rightarrow e < \int_1^2 e^{x^2} < e^4$

(6) Για να δείξω $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta g(x)dx$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$. βρίσκω ότι $h(x) \ge 0$ με πράξεις ή έχει ολικό ελάχιστο το 0 στο $[\alpha,\beta]$ οπότε $\int_\alpha^\beta h(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx \ge 0 \Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta g(x)dx$ (ή χωρίς το ίσον αν η ισότητα δεν ισχύει σε όλο το $[\alpha,\beta]$)

Πχ1 Να δείξετε $\int_0^1 (f^2(x)+1)dx \ge 2\int_0^1 xf(x)dx$.

Έστω $g(x) = f^2(x) + 1 - 2xf(x) = f^2(x) - 2xf(x) + x^2 + 1 - x^2$

$= (f(x)-x)^2 + 1 - x^2 \ge 0$ στο $[0,1]$ άρα.

$\int_0^1 g(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f^2(x) + 1 - 2f(x))dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)+1\,dx - \int_0^1 2xf(x)dx \ge 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (f^2(x)+1)dx \ge 2\int_0^1 xf(x)dx$

187

(Πχ₂) Να δείξετε α) $\int_0^1 e^{x^2}dx > \int_0^1 (x^2+1)\,dx$

β) $\int_0^1 e^{x^2}dx > 4/3$.

α) Έστω $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in R$.

$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2}-1) \geq 0$, $x \in R$ άρα η $f \nearrow$

για $x \geq 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ και μηδενίζεται μόνο για $=0$.

άρα $\int_0^1 f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (e^{x^2} - x^2 - 1)\,dx > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 (x^2+1)\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \int_0^1 (x^2+1)\,dx$.

β) Από το α. έχω $\int_0^1 e^{x^2}dx > \int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = 4/3$.

(7) Αν $f(x) \geq 0$
και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$
και η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ $\Longrightarrow$ $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

(Πχ)

Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και

$\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx - 6\int_\alpha^\beta x f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha 9x^2\,dx$ να βρεθεί η f.

Είναι $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx - 6\int_\alpha^\beta x f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta 9x^2\,dx \Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta (f^2(x)dx - 6xf(x) + 9x^2)dx = 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta (f(x) - 3x)^2 dx = 0$

Έστω $g(x) = (f(x) - 3x)^2 \geq 0$
και $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx = 0$
και η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ άρα $g(x) = 0$, $x \in [\alpha,\beta]$

$\Longrightarrow (f(x) - 3x)^2 = 0$

$f(x) = 3x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Να βρεθούν τα ολοκληρώματα.

α) $\int_0^1 (e^x+2x)\,dx$ β) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+1\right)dx$ γ) $\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx$

2) Να βρεθούν τα ολοκληρώματα.

α) $\int_0^1 4xe^{x^2}dx$ β) $\int_0^\pi 2x\,\eta\mu(x^2)\,dx$ γ) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

3) Να βρεθούν τα ολοκληρώματα.

α) $\int_0^1 \frac{3x+5}{x+1}\,dx$ β) $\int_0^1 \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,dx$ γ) $\int_3^4 \frac{3x+1}{x^2-4}\,dx$.

4) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$I=\int_0^\pi \frac{4\eta\mu^5 x}{\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x}\,dx-\int_\pi^0 \frac{4\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x}\,dx$$

5) Αν $\int_0^3 f(x)\,dx=6$, $\int_0^5 f(x)\,dx=8$, $\int_5^7 f(x)\,dx=4$

Να υπολογίσετε.

α) $\int_5^0 f(x)\,dx$ β) $\int_0^7 f(x)\,dx$ γ) $\int_5^3 f(x)\,dx$ δ) $\int_3^7 f(x)\,dx$.

6) Να δείξετε.

α) $\int_e^{2e} x^x\,dx > e^{e+1}$ β) $\int_0^1 \frac{2x\,\eta\mu x}{x^2+4}\,dx < \frac{5}{4}$

γ) $\int_2^4 e^{x^2}dx > 2$

7) Να δείξετε α) $2<\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx<2\sqrt{2}$.

β) $e<\int_1^2 e^{1/x}<\sqrt{e}$.

8) Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε

$$\int_\alpha^\beta (f^2(x)+5)\,dx \geq \int_\alpha^\beta (4xf(x)-5x^2)\,dx$$

9) Να δείξετε. α) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx < \int_0^1 x^2\,dx$.

β) $\int_0^1 \ln(x^2+1) < 1/3$

(10) Αν η f συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Για την οποία ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x)\eta\mu x - \eta\mu^2 x\right)dx$
α) Να βρεθεί ο τύπος της f
β) Να βρεθεί $\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{f'(x)}\,dx$.

(11) Αν η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = e$.
και $f(x) = e^x - x f'(x)$
α) Να βρεθεί ο τύπος της f
β) Να βρεθεί η κυρτότητα της f
γ) Να βρεθεί η εφαπτομένη της f στο $x_0 = 2$.
δ) Να δείξετε $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx > \int_1^2 \frac{e^2 x}{4}\,dx$.
ε) Να δείξετε $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx \geq \frac{3e^2}{8}$.

(12) α) Να δείξετε $t - \frac{t^3}{6} \leq \eta\mu t \leq t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
β) Να δείξετε $1 - \frac{x^2}{2} \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(13) $f(x) = \ln(x+1) - x$, $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$, $x > -1$
α) Μονοτονία ακρότατα f, g.
β) Να δείξετε $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$, για κάθε $x \geq 0$
γ) Να δείξετε $\frac{1}{3} < \int_0^1 \ln(x+1)\,dx < \frac{1}{2}$

(14) Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ και κοίλη
και $f(0) = 0$ και $\int_0^2 x\left[2f'(x) + x f''(x)\right]dx = 12$.
α) Να βρεθεί $f'(2)$
β) Να δείξετε $f(x) \geq 3x$. με ΘΜΤ στο $[0, x]$.
γ) Να δείξετε $\int_0^2 f(x)\,dx \geq 6$.