ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ.

ΘΕΜΑ 1| Έστω $f(x)=x^2-4x+6$, $x\geq 2$.

α) Να δείξετε $f(x)=(x-2)^2+2$, $x\geq 2$.

β) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρεθεί

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x)=f^{-1}(e^x)$

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, $C_{f^{-1}}$

ΘΕΜΑ 2| Δίνεται μια συνάρτηση $f: R\to R$ με $2x\leq f(x)\leq x^2+1$, $x\in R$

α) Να δείξετε ότι η f συνεχής στο 1

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1

γ) Αν η f είναι συνεχής στο R να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2015x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$

δ) Να δείξετε ότι $1\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 4/3$

ΘΕΜΑ 3| Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in R$ και $f(x)\neq x$.

α) Να δείξετε ότι η $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$ είναι σταθερή

β) Να δείξετε $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$ αν γνωρίζουμε ότι $f(0)=3$

γ) Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ΘΕΜΑ 4| Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\neq 0$, $f(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$, $f'(x)\neq 1$, $x\in[\alpha,\beta]$

α) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

β) Αν $g(x)=f^2(x)-f(\alpha)f(\beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $g(x_0)=0$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα σημείο στο οποίο η C_f τέμνει την ευθεία $y=x$.

227

ΘΕΜΑ 5| Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$, $B(1,4)$.

α) Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f και να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να δείξετε ότι η f^{-1} είναι ↘

β) Να λυθεί η ανίσωση $f[f^{-1}(|x|+1)-x]-f(2-x)<0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(e^x+2015x+2)=2$

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x+1)+f(2x)<6$

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f(x+1)+f^{-1}(3x)=5$.

ΘΕΜΑ 6| Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R. Για την οποία ισχύει $f^3(x)+e^{f(x)}=x+1$ και $f(1)=\alpha$

α) Να δείξετε $f(0)=0$

β) Να βρεθεί η μονοτονία της f και το πρόσημό της

γ) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ότι έχει μοναδικό σημείο καμπής

δ) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από C_f και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ως συνάρτηση του α.

ΘΕΜΑ 7| Αν η f είναι συνεχής στο R και έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $(\varepsilon): y=x+2$.

α) Να βρεθεί η ασύμπτωτη της $g(x)=f(x)+f(x+1)$ στο $+\infty$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,3]$ ώστε $3f(x_0)=f(1)+f(2)+f(3)$

γ) Αν $f(x)>0$ και $\int_2^4 f(x)\,dx=2015$ να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, C_g και τις ευθείες $x=1$, $x=3$

ΘΕΜΑ 8| Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=-e^{x-f(x)}$ και $f(0)=\ln(e+1)$

α) Να δείξετε $f(x)=\ln(e^{-x}+e)$

β) Να εξετάσετε της f ως προς μονοτονία, κυρτότητα

γ) Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $f(\alpha)-f(\beta)>f(\alpha+1)-f(\beta+1)$

δ) Να δείξεις ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

ΘΕΜΑ 9| Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $x \cdot f(x) + 1 = e^x$ για κάθε $x \in R$

α) Να δείξετε $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 1 & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να βρεθεί το π. ορισμού της f^{-1}

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια αν γνωρίζουμε ότι η f είναι κυρτή να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in R$ έχει μοναδική ρίζα

δ) Να βρεθεί $\lim\limits_{x \to 0^+} [x \cdot \ln x \cdot \ln f(x)]$ (Πανελ-Επαναλ. 2012)

ΘΕΜΑ 10| Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = f(0) = 0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$

α) Να δείξετε $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in R$

β) Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της f

γ) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$ (Πανελ. 2011)

ΘΕΜΑ 11| Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

β) Να βρεθεί η μονοτονία της f.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

δ) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της f στο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων (Πανελ-Επαναλ. 2010)

ΘΕΜΑ 12| Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

α) Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να δείξετε $\alpha = e$

β) Για $\alpha = e$ να δείξετε i) η f είναι κυρτή

ii) η f είναι ↘ στο $(-1, 0)$ και ↗ στο $[0, +\infty)$

iii) η εξίσωση $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$ έχει μία τουλ. ρίζα στο $(1, 2)$ όπου $\alpha, \beta \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ (Πανελ. 2009)

ΘΕΜΑ 13/ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln[(\lambda+1)x^2+x+1]-\ln(x+2)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\geq-1$

Α. Αν το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός να δείξετε ότι $\lambda=-1$

Β. Για $\lambda=-1$ να βρείτε:

i) τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της

ii) τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq0$ (Πανελ. 2009)

ΘΕΜΑ 14/

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f συνεχής στο 0

β) Να βρεθεί η μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x=e^{\alpha/x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

δ) Να δείξετε ότι $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$, $x>0$

(Πανελ. 2008)

ΘΕΜΑ 15/ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\frac{\lambda}{x}-\lambda$, $x>0$

Αν ισχύει για κάθε $f(x)\geq0$ για κάθε $x>0$ τότε.

α) Να δείξετε $\lambda=1$

β) Να μελετήσετε της f ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$

δ) Να λύσετε η ανίσωση $\ln(2y^2+1)-\frac{1}{y^2+2}>\ln(y^2+2)-\frac{1}{2y^2+1}$

ΘΕΜΑ 16/ Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_1^x\left(1-\frac{1}{t^2}+2\frac{1-\ln t}{t^2}\right)dt$, $x>0$, $t>0$

α) Να δείξετε $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{x}$, $x>0$

β) Να δείξετε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$, $\alpha\in R$ έχει μοναδική θετική ρίζα για κάθε $\alpha\in R$.
ε) Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\,\eta\mu\frac{\pi}{x}\right]$

ΘΕΜΑ 17/ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\left(e^t-\frac{t^2}{2}-1\right)dt$
α) Να δείξετε $f(x)=e^x-\frac{x^3}{6}-x-1$
β) Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της f
γ) Να βρεθεί η κυρτότητα της f
δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha^2-1$ για κάθε $\alpha\in R$.

ΘΕΜΑ 18/ Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1)$, $x\in R$
α) Να βρεθεί η κυρτότητα της f
β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h(x))}<\frac{e}{e+1}$
γ) Να βρεθεί η οριζόντια ασύμπτωτη της h στο $+\infty$ και η πλάγια ασύμπτωτη της h στο $-\infty$
δ) Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$, $x\in R$.
Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_ϕ, τον xx' και την ευθεία $x=1$ (Πανελ. 2014)

ΘΕΜΑ 19/ Έστω h, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$
α) Να δείξετε ότι αν $h(x)>g(x)$ τότε $\int_\alpha^\beta h(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$
β) Δίνεται η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R που ικανοποιεί τη σχέση $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ και $f(0)=0$
i) Να εκφρασεί η f' ως συνάρτηση της f
ii) Να δείξετε $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$, $x>0$
iii) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον xx', και τις ευθείες $x=0$, $x=1$. Να δείξετε ότι $\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1)$. (Πανελ. 2002)

ΘΕΜΑ 20| Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2005$

α) Να δείξετε i) $f(0)=0$ ii) $f'(0)=1$

β) Να βρεθεί το λ ώστε $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$

γ) Αν επιπλέον η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>f(x)$ να δείξετε i) $\int_0^1 f(x)\,dx<f(1)$ ii) $xf(x)>0$ για $x\neq 0$.

(Επαν. Πανελ. 2005)

ΘΕΜΑ 21| Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=(10x^3+3x)\cdot\int_0^2 f(t)\,dt-45$

α) Να δείξετε $f(x)=10x^3+6x-45$

β) Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε $g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$

γ) Αν ισχύει $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$ και $g(0)=g'(0)=1$ τότε

i) Να δείξετε $g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. (Πανελ. 2008)

ΘΕΜΑ 22| Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f

β) Να λυθεί η εξίσωση $2(x^2-3x+2)=\ln\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}$

γ) Να δείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία καμπής τέμνονται σε ένα σημείο του άξονα yy'

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx$

(Πανελ. 2010)

ΘΕΜΑ 23| Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1,\ x>0$

α) Να δείξετε ότι η f είναι ↘ στο $(0,1]$ και ↗ στο $[1,+\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013},\ x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

γ) Αν $x_1 < x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήμ. (β) να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f(x_0) + f(x_0) = 2012$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφ. παράσταση της $g(x) = f(x) + 1$ τον xx' και την ευθεία $x = e$ (Πανελ. 2012)

ΘΕΜΑ 24ο Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύουν οι σχέσεις $f(2) = 2$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{ημ 3x} = 3$ και $f''(x) \neq 0$, $x \in (0, 2)$

α) Να δείξετε $f(0) = 0$ β) Να δείξετε $f'(0) = 9$

γ) Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(0, f(0))$

δ) Να δείξετε ότι η f' δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες στο $(0, 2)$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$.

στ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$ (mathematica.gr) (72)

ΘΕΜΑ 25ο Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1\right) e^{-x}$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κοίλα, σημεία καμπής

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος ριζών

γ) Να δείξετε $e^x \geq \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$, $x \in R$.

δ) Αν $g: R \to R$ με $\lim_{x \to 0} \left(e^{g(x)} - g(x) - \frac{g^3(x)}{x}\right) = 1$.

Να δείξετε i) $e^{g(x)} - \frac{g^3(x)}{6} - g(x) \geq \frac{g^2(x)}{2} + 1 \geq 1$.

ii) $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ (mathematica.gr) (73)

ΘΕΜΑ 26ο Αν η f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R και $f(x) \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε $f(\alpha) = f(\beta)$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = 0$

β) Να δείξετε ότι $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

γ) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'''(\xi) = 0$ (mathematica.gr) (74)

433

ΘΕΜΑ 27 $f(x)=x\,e^{1/x},\ x\in\mathbb{R}^*$

α) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{1/x}=\frac{\alpha}{x}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$

δ) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\left(f(\frac{1}{x})-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$, (mathematica.gr) (79)

ΘΕΜΑ 28 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)e^{-x}+2x^2-3x+2$

α) Να βρεθούν f', f''

β) Να μελετήσετε την f ως προς κυρτότητα σ. καμπής

γ) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία ακρότατα

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και το πρόσημο της f

ε) Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες (mathematica.gr) (81)

ΘΕΜΑ 29 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x-1$

α) Να βρεθεί η μονοτονία τα ακρότατα οι ρίζες και το πρόσημο της f

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε $e^{x}<1-x+\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x>0$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f(x^2)+\ln x$, $x>0$

ΘΕΜΑ 30 (mathematica.gr) (82)

A. Να δείξετε $e^{x}>x>\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

B. Μια κατακόρυφη ευθεία $x=t$, $t\in(0,+\infty)$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=e^{x}$, $g(x)=\ln x$ στα σημεία A, B αντίστοιχα

α) Να βρεθεί η απόσταση $(AB)=d(t)$ ως συνάρτηση του t.

β) Να δείξετε ότι η $d'(t)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

γ) Να δείξετε ότι η d γίνεται ελάχιστη για κάποιο $t_0\in(0,1)$

(mathematica.gr) (103)

ΘΕΜΑ 31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{3}x$

α) Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρεθούν $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f και το σημείο τομής τους
δ) Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τις ασύμπτωτες
(mathematika.gr) (104.)

ΘΕΜΑ 32/ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.
β) Να λυθεί η εξίσωση $(\varepsilon\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}=(\sigma\upsilon\nu x)^{\varepsilon\varphi x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$
γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,+\infty)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-2015)$.
δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq e$ ισχύει $f(x+1)<\frac{\ln^2(x+1)-\ln^2 x}{2}<f(x)$
ε) Να υπολογίσετε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln^2(x+1)-\ln^2 x)$.
(mathematika.gr) 105

ΘΕΜΑ 33/ Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $xf'(x)-2f(x)=x$, $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=0$
α) Να δείξετε ότι η $h(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ είναι $\nearrow$ στο $(0,+\infty)$.
β) Να δείξετε $f(x)=x^2-x$, $x>0$
γ) Αν $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $g(1)=0$ και $g'(x)=f(x)$ να βρεθεί $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)}{\ln^2 x}$ (mathematika.gr) (117)

ΘΕΜΑ 34/ Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(1)=1$ και $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}$, $x>0$
α) Να βρεθεί ο τύπος της f.
β) Ένα σημείο M κινείται στην C_f και έστω A η προβολή του M πάνω στον xx'. Αν το σημείο A απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ρυθμό $2\ \mu o\nu/sec$, τη χρονική στιγμή που η τεταγμένη του M είναι 3 να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής
i) της απόστασης AM.
ii) της απόστασης OM.
iii) της γωνίας $M\hat{O}A$
iv) της απόστασης OB όπου B το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f στο M με τον xx' (mathematika.gr) 118

ΘΕΜΑ 35| Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha>0$ το οποίο έχει τρείς πραγματικές ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$

α) Να δείξετε $\beta^2>3\alpha\gamma$

β) Να δείξετε ότι το $P(x)$ έχει δύο τοπικά ακρότατα ακριβώς

γ) Αν x_1, x_2 οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων τότε να δείξετε $P''(x_1)+P''(x_2)=0$

δ) Να δείξετε ότι η $P(x)$ έχει ανάμεσα στα ακρότατα ένα σημείο καμπής

ε) Αν η $f(x)=\dfrac{P(x)}{x^2+\gamma x+\delta}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1, x=13$ και πλάγια την $y=2x+25$ τότε να δείξετε $P(x)=2x^3+x^2-12x-13$.

(Mathematica.gr) (119)

ΘΕΜΑ 36| Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $x^3f''(x)=e^{1/x}$, $f(1)=e$, $f'(1)=0$

α) Να δείξετε ότι η $g(x)=xf'(x)-f(x)+e^{1/x}$ είναι σταθερή

β) Να δείξετε $f(x)=xe^{1/x}, x>0$

γ) Να βρεθεί η κυρτότητα της f

δ) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$

ε) Να δείξετε ότι $2xe^{1/x}\geq(x+2)\sqrt{e}$ για $x>0$

στ) $\int_1^2 f(x)dx>\frac{9}{4}\sqrt{e}$ (Mathematica.gr) (120 συμπλήρ)

ΘΕΜΑ 37| Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $\ln f'(x)=\frac{1}{x-1}, x>1$

α) Να δείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής

β) Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(2, f(2))$

γ) Να δείξετε $f(x)\leq ex-2e$ για κάθε $x>1$

δ) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, xx', $x=2$, $x=4$ να δείξετε $E<2e$

ΘΕΜΑ 38 Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή την f'' για την οποία ισχύουν $f''(x)f(x)+[f'(x)]^2 = f(x)\cdot f'(x)$, $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{2}$

α) Να δείξετε $f(x)=e^{x/2}$.

β) Να δείξετε ότι αν η g περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = 0$, $\alpha>0$

γ) Να δείξετε $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{2004} \ln f(x)\, dx = 0$ με $\alpha>0$

δ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με $0\le g(x)\le 1$ να δείξετε $\int_0^1 \frac{g(x)}{1+f^2(x)}dx < 1$

Πηγή (Mathematica.gr) (127)

ΘΕΜΑ 39 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to R$ για την οποία ισχύουν $f''(x)<0$, $x\in[1,2]$, $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f'(2)=1$

α) Να δείξετε ότι η f είναι $\nearrow$ στο $[1,2]$ και να βρεθεί το Σ. Τιμών

β) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε $f'(\xi)=2$ και $x_0\in(1,2)$ ώστε $f''(x_0)<-1$

δ) Να δείξετε i) $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > \frac{f(2)-f(x)}{2-x}$, $x\in(1,2)$

ii) $f(x)\ge 2(x-1)$, $x\in[1,2]$

iii) $\int_1^2 f(x)dx \ge 1$

ε) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2-x$ τέμνει την C_f σε ένα ακριβώς σημείο

στ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) = f'(\xi_1)+2$. (Mathematica.gr)(128)

ΘΕΜΑ 40 α) Να δείξετε ότι η $g(x)=e^x+x$ είναι 1-1.

β) Αν $f:(0,+\infty)\to R$ με $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$, $x>0$ να δείξετε $f(x)=\ln x$

γ) Να βρείτε το ακρότατο της $h(x)=f(x)\cdot f(\frac{e}{x})$, $x>0$

δ) αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ να δείξετε

$$(f(\beta)-f(\alpha))(\gamma-\beta) > (f(\gamma)-f(\beta))(\beta-\alpha)$$

Πηγή (Mathematica.gr) (133)

ΘΕΜΑ 41| Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: (0,+\infty) \to R$ και $g: R \to R$ για τις οποίες ισχύουν $f(g(x)) \cdot g(x) = x$, $x \in R$ και $f'(g(x))g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x \in R$, $g(0)=1$

α) Να δείξετε $g(x) = e^x$, $x \in R$

β) Να δείξετε $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ και την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 0$.

δ) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη και η g κυρτή

ε) Να δείξετε $f(x) \leq g(x)$

στ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1$, $x = \ln 3$

πηγή (mathematica.gr) (134)

ΘΕΜΑ 42| Έστω $f: (0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{x^3} - \frac{2f(x)}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln x + x^2 f(x)$, $x > 0$ και $f(1) = 0$

α) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή

β) Να δείξετε $f(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$, $x > 0$

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(k)$ του χωρίου που περικλείεται από C_f τον xx' και τις ευθείες $x = 1$, $x = k$ με $k \in (0,1)$

ε) Να υπολογίσετε $\lim_{k \to 0^+} E(k)$

πηγή (mathematica.gr) (148)

ΘΕΜΑ 43| Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = \frac{4}{f^2(x)+1}$ και $f(0) = 0$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί το σημείο καμπής

β) Να δείξετε $f^3(x) + 3f(x) = 12x$, $x \in R$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$

δ) Να δείξετε $f^{-1}(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x$, $x \in R$.

δ) Να βρεθεί $\int_0^3 f(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ 44/ Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $x^2(f'(x)-1)=\ln x-1$, $x>0$ και $f(1)=1$

α) Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)+\frac{\ln x}{x}$, $x>0$ είναι $g(x)=x$

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$, $x>0$

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, xx', ευθείες $x=1$, $x=e$ (169)

ΘΕΜΑ 45/ Έστω $f(x)=3^x$ και $g(x)=-x^2+9x-5$

α) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της C_g που διέρχονται από το σημείο $A(1,4)$

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2-5x+6)=g(x)-4x$.

γ) Να βρεθεί $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}$

δ) Να δείξετε ότι τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα $A(1,3)$, $B(2,9)$ μόνο.

Πηγή (mathematica.gr) 174.

ΘΕΜΑ 46/ Έστω η συνάρτηση f που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,e]$ με $f(0)=0$.

α) Να δείξετε $\int_0^e xf''(x)\,dx = e(f'(e)-f(e))$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,e)$ ώστε.
$\int_0^e xf''(x)\,dx = e[f'(e)-f'(\xi)]$. (ΘΜΤ στο $[0,e]$ για την f)

γ) Να δείξεις ότι υπάρχει $\xi_1\in(\xi,e)$ τέτοιο ώστε
$\int_0^e xf''(x)\,dx = ef''(\xi_1)\cdot(e-\xi)$. (ΘΜΤ στο $[\xi,e]$ για την f')

Πηγή (mathematica.gr) (177)

ΘΕΜΑ 47/ Α) Αν η f συνεχής στο $[0,1]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=\frac{1}{1-x_0}-\frac{1}{x_0}$.

Β) Έστω η f ορισμένη στο R και $1+x\le f(x)\le e^x$, $x\in R$.

i) Να δείξετε ότι η f συνεχής στο $x_0=0$

ii) Αν η f συνεχής στο R να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $\frac{f(\xi)}{2015}=\xi$. iii) Να υπολογ. $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

(ιιι) Να δείξετε ότι αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε:
Για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει $\frac{3}{2} < E < e-1$

ΘΕΜΑ 48 Α) Να δείξετε $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Β) Έστω η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη $f(0)=0$, $f(1)=-1$ και $f'(x) = x+1-e^x-f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
ι) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,-1)$
ιι) Να δείξετε ότι η f είναι $\searrow$ και να βρεθεί το πρόσημο της
ιιι) Να βρεθεί η κυρτότητα της f και το σημείο καμπής
ιv) για κάθε $\alpha > 0$ να δείξετε $2f\left(\frac{3\alpha}{2}\right) > f(\alpha)+f(2\alpha)$
v) για κάθε $x>0$ να δείξετε $f(x)+ex \leq x+e-2$

ΘΕΜΑ 49 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\lambda x$, $\lambda>0$, $x \in \mathbb{R}$
α) Να βρεθεί το ελάχιστο της f
β) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ ώστε $\frac{e^x}{\lambda} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$.
γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β.
ι) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^x$
ιι) Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\right)$
ιιι) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_g, την εφαπτομένη της C_g, τον xx', και την ευθεία $y=-1$.

ΘΕΜΑ 50 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^y f'(x) - 2xe^y = f'\left(\frac{x}{e^y}\right) - \frac{2x}{e^y}$, $x>0$ και $f'(1)=-6$, $f(1)=3$
α) για $x=1$ και $y=-\ln x$ να δείξετε $f'(x)=2x-\frac{8}{x}$, $x>0$
β) Να βρεθεί ο τύπος της f.
γ) Να δείξετε ότι η f κυρτή και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$
δ) αν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha\beta\gamma=1$ και $\alpha+\beta+\gamma=\frac{10}{3}$ να δείξετε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>1$ (mathematica.gr)

ΘΕΜΑ 51) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $f'(x) = -\frac{f(x)}{x^2}$, $x>0$ και $f(1)=e$

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = f(x)\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ είναι σταθερή

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και κυρτότητας της f

δ) Να δείξετε $\sqrt{e} < \int_1^2 f(x)\,dx < e$.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $e^{1/x_0} = \int_1^2 f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 52) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $f(x) = \int_1^x \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt + \frac{\ln x}{x}$, $x>0$

α) Να δείξετε $f(x) = x - \frac{1-\ln x}{x}$, $x>0$

β) Να βρεθεί το πρόσημο της f.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ που περικλείεται από C_f, την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, και τις ευθείες $x=\lambda$, $x=1$ με $0<\lambda<1$

ε) Να βρείτε $\lim_{\lambda\to 0} E(\lambda)$

ΘΕΜΑ 53) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $2x < f'(x) < e^x$ για κάθε $x>0$ και $f(0)=1$

α) Να δείξετε $x^2+1 \le f(x) \le e^x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

β) Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4x^3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

δ) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από C_f, $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=1$ να δείξετε ότι $4 < 3E < 3e$.

Σ4+1

ΘΕΜΑ 54 A) Έστω $g(x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$, $x > 0$

i) Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της g

ii) Να βρεθεί το πρόσημο της g και το σύνολο τιμών της

B) Έστω $f:(0,+\infty)$ με $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2\ln x > 0$

i) Να δείξετε ότι $f(x) > \ln^2 x$ για κάθε $x > 1$

ii) Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = \lambda$, $x = 1$, $\lambda > 1$ να δείξετε.

$E(\lambda) > \lambda\ln^2\lambda - 2\lambda\ln\lambda + 2\lambda - 2$

iii) Να υπολογίσετε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$

ΘΕΜΑ 55 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 1$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = \alpha$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$

γ) Αν ο ρυθμός μεταβολής του α είναι $\alpha'(t) = \alpha(t)$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του E τη χρονική στιγμή κατά την οποία η εφαπτομένη διέρχεται από το $O(0,0)$

δ) Να βρεθεί $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha)$

ε) Να βρεθεί $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\int_1^t f(x)\,dx\right)$

ΘΕΜΑ 56 Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) > 0$ στο (α, β) με σύνολο τιμών το $f([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$

α) Να δείξετε $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 1$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \frac{2\alpha + \beta}{3}$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} = 3$$

ΘΕΜΑ 57| Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτ. $f:(1,+\infty)\to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)\cdot f'(x)-\frac{1}{x}=0$ για κάθε $x>1$ και $f(e)=1$

α) Να δείξετε ότι η f είναι θετική

β) Να βρεθεί η μονοτονία της f

γ) Να δείξετε $f(x)=\sqrt{\ln x}$

δ) Να βρεθεί η κυρτότητα της f και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(e,1)$

ε) Να δείξετε $\int_e^{e^2} f(x)\,dx < \frac{e^3}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3e}{4}$.

ΘΕΜΑ 58| Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1}=-2$

α) Να δείξετε ότι $f(2)=-5$ και να βρεθεί το πρόσημο της f.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε.

$$\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}=\frac{2015}{f(x_0)}$$

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x)+f(x^2)=2x^2$, $x\in\mathbb{R}$

i) να δείξετε $f(1)=-2$.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $(\xi-3)f'(\xi)+f(\xi)=1$.

(mathematica.gr). (91)

ΘΕΜΑ 60| A| Για τις συναρτήσεις h, g ισχύει $h(x)\le g(x)$ για κάθε x κοντά στο $x_0\in\mathbb{R}$. Να δείξετε·

α) Αν $\lim_{x\to x_0} h(x)=+\infty$ τότε και $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

β) Αν $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ τότε και $\lim_{x\to x_0} h(x)=-\infty$

B| Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=2012-\frac{x^2}{x^2+e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρεθεί η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f

β) Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)-2011x$ είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$

γ) Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}[f(x+2)-f(x)]$ (mathematica.gr) 97.