ΛΥΚΕΡΙΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
Μαθηματικός - Φυσικός

# Εσωτερικό Γινόμενο

1η: Για να υπολογίσουμε τη γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο: συνφ = $\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ , όπου φ η γωνία των δύο διανυσμάτων.

π.χ.: Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ = (3 , 3) και $\vec{\beta}$ = (0 , 2).

2η: Για να δείξουμε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ = 0.

3η: Για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος που δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός άλλων διανυσμάτων, υπολογίζουμε το τετράγωνο του μέτρου, χρησιμοποιώντας τη σχέση $|\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}^2$.

π.χ.: Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}|$ = 2, $|\vec{\beta}|$ = 1 και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Να υπολογίσετε το $|\vec{u}|$.

4η: Για να δείξουμε ισότητες ή ανισότητες με μέτρα διανυσμάτων, υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο.

π.χ.: Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να δείξετε ότι:

$$\left|4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right| = \left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

5η: Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα σε δύο κάθετες συνιστώσες εκ των οποίων η μία είναι παράλληλη σε δοσμένο διάνυσμα.

π.χ.: Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (2 , -3) σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες εκ των οποίων η μία να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\beta}$ = (3 , -1).

6η: Όταν ζητείται ο γεωμετρικός τόπος σημείων Μ, που ικανοποιούν μια διανυσματική σχέση, κάνουμε πράξεις σε αυτήν για να καταλήξουμε σε απλούστερη από την οποία θα «φαίνεται» η ιδιότητα των σημείων Μ.

Αν, λοιπόν, Α, Β είναι σταθερά σημεία και Μ τυχαίο σημείο του οποίου ζητείται ο γ.τ. τότε: αν καταλήξουμε σε σχέση:

- $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ — το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ
- $\left|\overrightarrow{MA}\right|$ = ρ, ρ > 0 σταθερός αριθμός — το Μ ανήκει στον κύκλο (Α , ρ)
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ = 0 — το Μ ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΑΒ
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB}$ = 0 — το Μ ανήκει σε ευθεία κάθετη στην ΑΒ στο Α

π.χ.: Αν Α, Β είναι σταθερά σημεία του επιπέδου και Ο το μέσον του ΑΒ, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

i) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ = κ , κ ϵ ℝ  ii) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$ = κ , κ ϵ ℝ

iii) $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$ = κ , κ ϵ ℝ  iv) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$ = κ , κ > 0.