ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Διάνυσμα Θέσης ενός σημείου

Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Ο του επιπέδου ως σημείο αναφοράς (ακόμα και κάποιο συγκεκριμένο στο σχήμα μας) τότε για κάθε άλλο σημείο Α του επιπέδου το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ λέγεται διάνυσμα θέσης του Α ως προς το Ο .

Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, αν Ο είναι το επιλεγμένο σημείο αναφοράς .

Αν **Μ είναι το μέσο του ΑΒ** τότε $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

Οι ασκήσεις στις οποίες δεν γνωρίζουμε συντεταγμένες λύνονται συνήθως αν θεωρήσουμε ως σημείο αναφοράς ένα από τα **σταθερά σημεία** που υπάρχουν στο σχήμα μας και γράφοντας όλα τα διανύσματα ως διαφορά των διανυσμάτων θέσης των άκρων τους.

ΠΡΟΣΟΧΗ : Όλα τα διανύσματα πρέπει να ξεκινούν από το σημείο που επιλέξαμε ως σημείο αναφοράς. Αποφεύγουμε να πάρουμε ως σημείο αναφοράς το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος .

1η Συνθήκη Παραλληλίας δύο διανυσμάτων (χωρίς συντεταγμένες)

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{\beta} \quad , \lambda \in \Re$$

Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά (χωρίς να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους) κάνουμε ότι και στις υπόλοιπες ασκήσεις με τα διανύσματα θέσης και καταλήγουμε σε μία σχέση όπου το ένα διάνυσμα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Συντεταγμένες

Η αντιμετώπιση των διανυσμάτων όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους είναι διαφορετική . Εδώ έχουμε συγκεκριμένους τύπους και διαδικασίες που εφαρμόζουμε .

Άκρα διανύσματος : Αν γνωρίζουμε τα άκρα $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ του διανύσματος τότε

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1 , y_2-y_1)$$

Μέσο ευθύγραμμου τμήματος : Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Αν γνωρίζουμε σημεία το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να βρίσκουμε διανύσματα.

Πράξεις με διανύσματα: Σε όλες τις πράξεις με διανύσματα κάνουμε τις πράξεις μεταξύ των αντίστοιχων συντεταγμένων (εκτός από τον πολλαπλασιασμό διανυσμάτων).

Αν $\vec{a} = (x_1,y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$ και $\lambda, \mu \in \Re$, τότε

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2 \;,\; \lambda y_1 + \mu y_2)$$

Μέτρο διανύσματος : Αν $\vec{a} = (x , y)$ τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2η Συνθήκη Παραλληλίας (με συντεταγμένες)

Δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1 , y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2 , y_2)$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

Αν $\vec{a} = (x , y)$ και $x \neq 0$ (δηλαδή το $\vec{a}$ δεν είναι παράλληλο στον άξονα y΄y) τότε ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης λ του διανύσματος ως εξής :

$$\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφφ}$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον ημιάξονα Ox .

Συνευθειακά σημεία : Αν μας ζητάνε να δείξουμε ή να εξετάσουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά κάνουμε τα εξής :

- Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$
- Αποδεικνύουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι συγγραμμικά .

Ίσα διανύσματα : Δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1 , y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2 , y_2)$ είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες συντεταγμένες . Δηλαδή :

$$\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$$

Διάνυσμα παράλληλο σε άξονα : Αν $\vec{a} = (x , y)$ τότε $\vec{a} \,//\, x'x \Leftrightarrow y = 0$

$\vec{a} \,//\, y'y \Leftrightarrow x = 0$

Ομόρροπα – Αντίρροπα διανύσματα

Αν $\vec{a} = (x_1,y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2 , y_2)$ δύο συγγραμμικά διανύσματα τότε :

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1x_2 > 0 \text{ και } y_1y_2 > 0$$

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1x_2 < 0 \text{ και } y_1y_2 < 0$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}||\vec{\beta}| \text{συνφ}$$

όπου φ η γωνία των δύο διανυσμάτων .

Όταν το εσωτερικό γινόμενο είναι **θετικός αριθμός** , η **γωνία φ** είναι **οξεία** και όταν είναι **αρνητικός** αριθμός είναι **αμβλεία** .

Τετράγωνο διανύσματος : Είναι $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Κάθετα διανύσματα : $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου

Αν $\vec{a} = (x_1 , y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2 , y_2)$ τότε :

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ : Στο εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύουν κάποιες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

$(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \neq \vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$ [δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα]

$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{\beta} \cdot \vec{v} \not\Rightarrow \vec{a} = \vec{\beta}$ [δεν ισχύει ο νόμος της διαγραφής]

Συνημίτονο γωνίας διανυσμάτων

$$\text{συνφ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

Το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ το βρίσκουμε συνήθως από τις συντεταγμένες τους. Αν τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων διανυσμάτων, τότε εφαρμόζουμε πρώτα την επιμεριστική ιδιότητα.

Τα μέτρα βρίσκονται είτε απευθείας από τον τύπο του μέτρου είτε υψώνοντας το μέτρο στο τετράγωνο και κάνοντας τις πράξεις στην συνέχεια .

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Εφαρμόζουμε την σχέση $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{v}_1$ (1) , όπου $\vec{v}_1$ είναι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{a}$.

Επειδή $\vec{v}_1 // \vec{a}$ είναι $\vec{v}_1 = \lambda\vec{a}$. Αντικαθιστώντας στην (1) μπορούμε να βρούμε το λ , άρα και το $\vec{v}_1$.

Αν θέλουμε να βρούμε την κάθετη συνιστώσα του $\vec{v}$ στο $\vec{a}$ χρησιμοποιούμε την σχέση :

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

΄Ασκηση 1 (Σχ.Βιβ. Α9/27)

Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως , ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ , να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma \Delta} = 4\overrightarrow{MN}$

Λύση : Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το Α (στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν θεωρούσαμε ως σημείο αναφοράς το Β ή το Γ ή το Δ). Έχουμε :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma \Delta} = 4\overrightarrow{MN}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma} = 4\,(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Delta} - 2\overrightarrow{A\Gamma} = 4\,(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}}{2} + \frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{2}) \quad *$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Delta} - 2\overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Delta} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$$

* Το Ν είναι μέσο του ΒΔ άρα έχουμε διάνυσμα θέσης του μέσου ευθύγραμμου τμήματος ενώ το Μ είναι μέσο του ΑΓ .

Άσκηση 2

Έστω Ο τυχαίο σημείο του χώρου. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \Re$ ώστε να είναι $\overrightarrow{O\Gamma} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

Λύση : Ισοδύναμα έχουμε

$$\overrightarrow{O\Gamma} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Gamma} = \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} = \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{BA}$$

$\Leftrightarrow$ Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 3

α) Να βρεθεί σημείο Ο του επιπέδου τριγώνου ΑΒΓ για το οποίο είναι:

$$2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$$

β) Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του χώρου είναι:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2}{11}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{11}\overrightarrow{BM} + \frac{6}{11}\overrightarrow{\Gamma M}$$

Λύση :

α) Έχουμε

$$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$$ [Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το Α]

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AO}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})+6(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AO})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AO}+6\overrightarrow{A\Gamma}-6\overrightarrow{AO}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{A\Gamma}=11\overrightarrow{AO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AO}=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{A\Gamma}$$

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AE}=\frac{6}{11}\overrightarrow{A\Gamma}$. Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΔΟΕ και η κορυφή Ο είναι το ζητούμενο σημείο.

β) $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ [Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το Μ]

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MO})+3(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MO})+6(\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{MO})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{M\Gamma}=11\overrightarrow{MO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{11}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{11}\overrightarrow{MB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{MO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{2}{11}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{11}\overrightarrow{BM}+\frac{6}{11}\overrightarrow{\Gamma M}$$

Άσκηση 4

Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε το ίδιο και για τα διανύσματα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$

Λύση : α) Έστω ότι $\vec{\gamma}\,//\,\vec{\delta}$. Τότε υπάρχει $\lambda\in\Re$ με $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\delta}$ οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$\vec{\gamma}=\lambda\vec{\delta} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=\lambda(\vec{\alpha}-4\vec{\beta})$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}-4\lambda\vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda\vec{\beta}+3\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (4\lambda+3)\vec{\beta}=(\lambda-2)\vec{\alpha}$$

Επειδή δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα μηδέν τα 4λ+3 και λ-2, έστω ότι

$4\lambda+3 \neq 0$, οπότε $\vec{\beta} = \dfrac{\lambda-2}{4\lambda+3}\vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$. Άτοπο! Άρα τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Όμοια αν $\lambda \neq 2$.

Άσκηση 5

Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda+\mu)\vec{i} + (\lambda - 3\mu + 1)\vec{j}$ και $\vec{\beta} = (2\mu+5)\vec{i} + (4\lambda + \mu - 1)\vec{j}$ να είναι ίσα. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$.

Λύση : Για να είναι ίσα τα δύο διανύσματα πρέπει

$$\begin{cases} 2\lambda+\mu = 2\mu+5 \\ \lambda - 3\mu + 1 = 4\lambda + \mu - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = 5 \\ 3\lambda + 4\mu = 2 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα (με όποια μέθοδο θέλουμε – ενδεικτικά εδώ εφαρμόζουμε τη μέθοδο των οριζουσών):

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11$$

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = 22 \qquad D_\mu = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -11$$

Άρα $\lambda = \dfrac{D_\lambda}{D} = \dfrac{22}{11} = 2$ και $\mu = \dfrac{D_\mu}{D} = \dfrac{-11}{11} = -1$.

Επομένως τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα για λ = 2 και μ = -1.

Για αυτές τις τιμές των λ και μ τα δύο διανύσματα έχουν συντεταγμένες $\vec{\alpha} = (3,6) = \vec{\beta}$.

Επομένως $2\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta} = \frac{3}{2}\vec{\alpha} = \left(\frac{9}{2}, 9\right)$ και $|2\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}| = \sqrt{(\frac{9}{2})^2 + 9^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9^2}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Άσκηση 6

Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(3 , -2), ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Β(-1 , 4).

Λύση : Έστω Α΄(x , y) το ζητούμενο σημείο. Για να είναι το σημείο Β κέντρο συμμετρίας των Α και Α΄, πρέπει το Β να είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄. Άρα για τις συντεταγμένες του ισχύουν οι σχέσεις : $-1 = \dfrac{3+x}{2}$ και $4 = \dfrac{-2+y}{2}$

από τις οποίες προκύπτουν x = -5 και y = 10. Άρα το συμμετρικό του Α ως προς το σημείο Β είναι το Α΄(-5 , 10).

Άσκηση 7

Τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία Δ(1 , -2), Ε(2 , 3) και Ζ(-1 , 4). Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Λύση : Από τους τύπους των συντεταγμένων του μέσου ευθύγραμμου τμήματος έχουμε:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 1 \quad , \quad \frac{y_A + y_B}{2} = -2 \qquad \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = 2 \quad , \quad \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = 3$$

$$\frac{x_B + x_\Gamma}{2} = -1 \quad , \quad \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = 4$$

ή ισοδύναμα $\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A + + x_\Gamma = 4 \\ x_B + x_\Gamma = -2 \end{cases}$ και $\begin{cases} y_A + y_B = -4 \\ y_A + + y_\Gamma = 6 \\ y_B + y_\Gamma = 8 \end{cases}$

Λύνοντας τα δύο συστήματα βρίσκουμε ότι: Α(4 , -3), Β(-2 , -1), Γ(0 , 9).

Άσκηση 8

Δίνονται τα σημεία Α(-1 , -5), Β(2 , 1) και Γ(1 , 5).

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Λύση : α) Για να σχηματίζουν τρίγωνο τα τρία σημεία πρέπει να **μην** είναι συνευθειακά. Επομένως, πρέπει τα διανύσματα

$\overrightarrow{AB} = (2–(-1),1–(-5)) = (3,6)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1–(-1),5–(-5)) = (2,10)$

να μην είναι συγγραμμικά, δηλαδή πρέπει

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \neq 0$$

Όμως $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18 \neq 0$, άρα τα Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται, επομένως οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ θα έχουν κοινό μέσο, έστω Ο. Αφού γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των Α και Γ μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου Ο. Είναι: $x_o = \frac{-1+1}{2} = 0$ και $y_o = \frac{-5+5}{2} = 0$, δηλαδή Ο(0,0). Για τις συντεταγμένες του Δ τώρα ισχύουν: $\frac{x_B + x_\Delta}{2} = 0 \Leftrightarrow x_\Delta = -x_B = -2$ και $\frac{y_B + y_\Delta}{2} = 0 \Leftrightarrow y_\Delta = -y_B = -1$, άρα Δ(-2 , -1).

Άσκηση 9

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 , 2)$, $\vec{\beta} = (3 , 4)$ και $\vec{\gamma} = (5 , 20)$.

α) Να αποδείξετε ότι ανά δύο δεν είναι συγγραμμικά.

β) Να αναλύσετε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα.

Λύση : α) Αρκεί να δείξουμε ότι οι ορίζουσες των συντεταγμένων τους, όταν τα παίρνουμε ανά δύο, δεν κάνει ποτέ μηδέν. Έχουμε:

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad , \quad \det(\vec{\alpha},\vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

και $$\det(\vec{\beta},\vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 40 \neq 0.$$

β) Θέλουμε να βρούμε πραγματικούς αριθμούς λ και μ τέτοιους ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$. Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (5 , 20) = \lambda\,(1 , 2) + \mu\,(3 , 4)$$

$$\Leftrightarrow (5 , 20) = (\lambda + 3\mu , 2\lambda + 4\mu)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 5 \\ 2\lambda + 4\mu = 20 \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε λ = 20 και μ = -5. Επομένως οι ζητούμενες συνιστώσες είναι $\vec{\gamma}_1 = 20\vec{\alpha} = (20 , 40)$ και $\vec{\gamma}_2 = -5\vec{\beta} = (-15 , -20)$.

Άσκηση 10

Δίνονται τα σημεία Α(1 , 5), Β(5 , -2) και Γ(-3 , -3).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

β) Να βρεθεί εκείνο το σημείο Μ του επιπέδου, του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β, Γ είναι το ελάχιστο.

Λύση: α) Αρχικά θα δείξουμε ότι σχηματίζουν τρίγωνο (όπως και στην άσκηση 8). Έχουμε:

$\overrightarrow{AB} = (1 - 5 , 5 - (-2)) = (-4 , 7)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1 - (-3) , 5 - (-3)) = (4 , 8)$ και

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -32 - 28 = -60 \neq 0$, άρα τα Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

Επίσης $(AB) = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

και $(B\Gamma) = \sqrt{(-3-5)^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.

Άρα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΒΓ.

β) Έστω Μ(x , y). Ζητάμε το σημείο για το οποίο η ποσότητα $(MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2$ γίνεται ελάχιστη. Όμως:

$(MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2 =$

$= (x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (x + 3)^2 + (y + 3)^2 =$

$= (x^2 - 2x + 1 + x^2 - 10x + 25 + x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25 + y^2 + 4y + 4 + y^2 +$

$+ 6y + 9) =$

$= 3x^2 - 6x + 35 + 3y^2 + 38 =$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 32 + 3y^2 + 38 =$

$= 3(x - 1)^2 + 3y^2 + 70.$

Προφανώς η τελευταία παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν x = 1 και y = 0. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(1 , 0).

Άσκηση 11

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τους αριθμούς:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ii) $\vec{\alpha}^2$ iii) $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ iv) $(2\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta})^2$.

Λύση: Είναι

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ συνφ $= 2 \cdot 3 \cdot$ συν$\frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

ii) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 4$

iii) $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}^2 = 3\vec{\alpha}^2 - 5\vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 =$

$= 3 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 9 = -21$

iv) $(2\vec{\alpha}-\frac{1}{2}\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \frac{1}{4}\vec{\beta}^2 = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 9 = 10 - \frac{9}{4} = \frac{31}{4}$

Άσκηση 12

Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{3\pi}{4}$, να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Λύση: Για να βρούμε το μέτρο του $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη και περνάμε σε σχέση με διανύσματα. Έχουμε :

$|\vec{\gamma}| = |3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = |3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = (3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2$

Όμως $(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = 9\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = 9 \cdot 1 - 12 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 4 \cdot 2 =$

$= 9 + 12 - 8 = 13.$

Άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{13}$.

Άσκηση 13

Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (2\ ,\ 1)$ και $\vec{\beta} = (2 + \sqrt{3}\ ,\ 1 - 2\sqrt{3})$.

Λύση: Για να βρούμε τη γωνία δύο διανυσμάτων χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\text{συνφ} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

Είναι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 2 \cdot (2 + \sqrt{3}) + 1 \cdot (1 - 2\sqrt{3}) = 5$

και $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = \sqrt{2^2 + 1^1}\sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + (1-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}\sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1 - 4\sqrt{3} + 12} =$

$= \sqrt{5}\sqrt{20} = 10.$

Άρα συνφ $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ και επομένως $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.

Άσκηση 14

Να βρεθεί διάνυσμα με μέτρο 2, κάθετο στο $\vec{\alpha} = (-3\ ,\ 4)$.

Λύση: Έστω $\vec{\beta} = (x\ ,\ y)$ το ζητούμενο διάνυσμα. Αφού έχει μέτρο 2 θα ισχύει ότι:

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad (1)$$

Επίσης, αφού το $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$, θα ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$, δηλαδή $-3x + 4y = 0$ (2).

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε ότι: $x = \pm\frac{8}{5}$ και $y = \pm\frac{6}{5}$.

Άρα είναι $\vec{\beta} = (\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ ή $\vec{\beta} = (-\frac{8}{5},-\frac{6}{5})$.

Άσκηση 15

Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v} = (3 , 5)$ σε δύο συνιστώσες, μιας παράλληλης προς το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (1 , 2)$ και μιας κάθετης προς αυτό.

Λύση: Για την προβολή $\vec{v}_1$ του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στην ευθεία που ορίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι ισχύει : $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{v}_1$. Επίσης αφού τα $\vec{v}_1$ και $\vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικά θα ισχύει $\vec{v}_1 = \lambda\vec{a}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση βρίσκουμε : $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{v}}{\vec{\alpha}^2} = \frac{13}{5}$. Άρα $\vec{v}_1 = \lambda\vec{a} = (\frac{13}{5},\frac{26}{5})$.

Για την κάθετη συνιστώσα $\vec{v}_2$ έχουμε $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ Γ Ι Α Λ Υ Σ Η

1. α) Αν ΑΜ είναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ , δείξτε ότι $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma}$

   β) Αν ΑΜ , ΒΝ και ΓΡ είναι οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ , δείξτε ότι

$$\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{\Gamma P} = \vec{0}$$

2. Να βρείτε σημείο Ο του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ τέτοιο ώστε :

$$\vec{AO} + 2\vec{BO} + 3\vec{\Gamma O} = \vec{0}$$

3. Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ο του επιπέδου . Αν

$$\vec{OA} + \vec{O\Gamma} = \vec{OB} + \vec{O\Delta}$$

   να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ . Να προσδιοριστεί σημείο Μ του επιπέδου τέτοιο, ώστε: $\vec{A\Gamma} + \vec{BM} = \vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta}$

5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ , Λ των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι : $\vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} = 2\vec{K\Lambda}$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της ΑΓ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{M\Delta} = \vec{\Gamma B}$ και $\vec{ME} = \vec{BA}$. Να αποδείξετε ότι :

   α) Τα σημεία Δ , Α και Ε είναι συνευθειακά.

   β) ΑΔ = ΑΕ

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα μεταβλητό σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{M\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο από το σημείο Μ .

8. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ όταν:

   α) $\frac{2}{3}(\vec{x} + 5\vec{a}) = \frac{3}{2}(\vec{x} + 5\vec{\beta})$ β) $2\vec{x} - 3(\vec{a} - \vec{x}) = 3\vec{\beta} + 2(\vec{x} - 3\vec{a})$

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Αν $\vec{AB} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{A\Gamma} = 5\vec{a} - \vec{b}$ και Δ ένα τυχαίο σημείο τέτοιο , ώστε $\vec{A\Delta} = 11\vec{a} - 5\vec{b}$ να αποδείξετε ότι :

   α) Τα σημεία Β , Γ και Δ είναι συνευθειακά .

   β) ΒΔ = 3 ΒΓ .

10. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα $\vec{u} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.
11. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^2 - 9 , \lambda^2 - 4\lambda + 3)$, όπου $\lambda \in \Re$.

    α) Για ποιες τιμές του λ είναι $\vec{a} = \vec{0}$;

    β) Για ποιες τιμές του λ είναι $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a}$ //x΄x ;

    γ) Για ποιες τιμές του λ είναι $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a}$ //y΄y ;
12. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}$ =(-6,13) ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ = (2,3) και $\vec{\beta}$ = (3,-1) .
13. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(2 , 6) και Β(6 , 10) . Να βρεθεί σημείο Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ τέτοιο , ώστε ΑΓ = 3 ΒΓ .
14. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (x^2 + 1 , y^2 + 1)$ και $\vec{\beta}$ = (2y , 2x). Να βρεθούν οι τιμές των x και y , έτσι ώστε τα δύο διανύσματα να είναι ίσα .
15. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(3 , -2) ως προς το σημείο Β(-1 , 4) .
16. Να βρεθούν οι αριθμοί λ , μ ώστε τα $\vec{a}$ = (2λ+μ,λ–3μ+1) και $\vec{\beta}$ =(2μ+5,4λ+μ–1) να είναι ίσα . Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$.
17. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι Α(2 , 5) , Β(7 , 6) , Γ(4 , 3) . Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ και του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου .
18. Να βρεθούν τα διανύσματα , τα οποία είναι συγγραμμικά με το διάνυσμα $\vec{a}$ = (4 , -3) και έχουν μέτρο διπλάσιο από αυτό .
19. Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι, ώστε το διάνυσμα $\vec{a}$ = (λ – 2 , λ – 3) να έχει μέτρο 5.
20. Δίνονται τα σημεία Α(3 , 2) και Β(5 , -3). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ έτσι , ώστε το Β να είναι το μέσο του ΑΓ .
21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ = (2 , 3) , $\vec{\beta}$ = (5 , -2) , $\vec{\gamma}$ = (3 , -4) . Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων : α) $\vec{u} = 3\vec{a} + 3\vec{\beta}$, β) $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}$.
22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1 , 5) , Β(3 ,11) και Γ(7 , 3) . Να βρείτε τις συντεταγμένες των μέσων των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ .
23. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(-3 , -2) , Β(-2 , 6) , Γ(4 , -4) . Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου .

24. Να βρείτε τις τιμές του μ, ώστε τα σημεία Α(1,0), Β($-μ^2$,3) και Γ(-5μ,9) να είναι συνευθειακά.
25. Να βρεθούν οι τιμές του $λ \in \Re$ έτσι , ώστε τα διανύσματα $\vec{u}$ = (λ+2 , 3–λ) και $\vec{w}$ = (3λ+3 , λ+3), να είναι παράλληλα . Πότε είναι ομόρροπα και πότε αντίρροπα ;
26. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x ώστε τα διανύσματα $\vec{a}$ = (x , 8) και $\vec{\beta}$ = (2 , x) να είναι αντίρροπα .
27. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά , να αποδείξετε το ίδιο για τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$.
28. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά , να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} - (\lambda + 1)\vec{\beta}$, να είναι παράλληλα .
29. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \Re$, ώστε τα διανύσματα $\vec{a}$ = (x–1 , x+1) και $\vec{\beta}$ = (5–x , 1–x) να είναι κάθετα. Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των δύο διανυσμάτων, αν ορίζεται .
30. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα , να αποδειχθεί ότι είναι κάθετα και τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
31. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.
32. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{v}$ = (10 , 5) σε δύο συνιστώσες , μία παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$ = (3 , 4) και μία κάθετη σε αυτό .
33. Για τυχαία σημεία Ο , Α , Β , Γ να αποδείξετε ότι: $\vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma} + \vec{OB} \cdot \vec{\Gamma A} + \vec{O\Gamma} \cdot \vec{AB} = \vec{0}$
34. Δίνονται τα σημεία Α(3 , 1) , Β(1 , 3) , Γ(5 , 3) και Δ(1 , -1) . Να αποδείξετε ότι :
   α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ορθογώνια και ισοσκελή .
   β) Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .
   γ) Τα σημεία Α , Γ και Δ είναι συνευθειακά .
35. Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|$= 1 . Αν τα δύο διανύσματα σχηματίζουν γωνία 30^o , να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{x} = \vec{a} - \vec{\beta}$.
36. Να εξεταστεί αν τα σημεία Κ(α + β , α – β) , Λ(α , -β) και Μ(α + 2β , 2α – β) είναι συνευθειακά .
37. Να βρεθεί διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{a}$ = (4 , -3) , που να έχει μέτρο 2 .

38. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$= (1,-1) , $\vec{\delta}_2$= (x–2y+1, 2x+y–3), $\vec{\delta}_3$= (2x–2y+3,-4x+4y–4) και $\vec{\delta}_4 = (\frac{3}{2}$,-2) :

α) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των x και y ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 + \vec{\delta}_3$ να είναι συγγραμμικό με το $\vec{\delta}_4$, και ,

β) Να βρείτε τα x και y ώστε $\vec{\delta} = \vec{0}$.

39. Αν $|\vec{a}|$= 2 και για κάθε x , y$\in \Re$ τα διανύσματα x$\vec{a}$ + y$\vec{\beta}$ και 2y$\vec{\alpha}$ - 3x$\vec{\beta}$ είναι κάθετα , να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

40. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a}$ =(-6 , 8) . Να υπολογίσετε το μέτρο του και να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ αντίρροπο του $\vec{a}$ με μέτρο τριπλάσιο από το $\vec{a}$.

41. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x , το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία Α(1,2) και Β(3,-4) .

42. Δίνονται τα σημεία Α(0 , $-\frac{\alpha\beta}{\gamma}$) , Β($\frac{\alpha+\beta}{3}$,$\frac{\gamma}{3}$) και Γ($\frac{\alpha+\beta}{2}$,$\frac{\gamma^2+\alpha\beta}{2\gamma}$) , με γ$\neq$ 0. Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία .

43. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(λ , -2), Β(2λ , λ) , Γ(3λ , 1) και Δ(3λ + 1 , λ+1). Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι τραπέζιο με βάσεις τις ΑΒ και ΓΔ .

44. Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα με αρχή το Α(2,4) και πέρας το Β(4,2) με τον άξονα x΄x. Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$;

45. Να βρείτε τις τιμές του x$\in\Re$, ώστε τα διανύσματα $\vec{a}$= (x+3 , x+1) και $\vec{\beta}$= (5–x , -5) να είναι κάθετα .

46. Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$$

47. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(5,2), Β(2,1) και Γ(7,6). Να υπολογίσετε την γωνία Α του τριγώνου .

48. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}|\vec{\alpha}|$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την γωνία φ των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

49. Αν 1 + $\vec{\alpha}\vec{\beta} \neq 0$, να λύσετε την εξίσωση : $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{\alpha})\vec{\beta} = \vec{\gamma}$, όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι δοσμένα διανύσματα .

50. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων

$$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} \text{ και } \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} .$$

51. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}$ = (-2 , 3) και $\vec{v}$ = (4 , -3) . Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$, ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

52. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{4}$, καθώς και το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$. Να βρείτε :

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{u}$.

β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

γ) Την γωνία φ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{u}$.