ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1 . Ένα **σημείο Μ(x,y) ανήκει σε μια γραμμή C** αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωσή της .

Π.χ. : Στην ευθεία ε : $y = 2x + 5$, ανήκει το σημείο Α(2,9) αφού $9 = 2 \cdot 2 + 5$ ενώ το σημείο Β(3 , 5) δεν ανήκει στην ε αφού $5 \neq 2 \cdot 3 + 5$.

2 . Για να βρούμε τα **κοινά σημεία δύο γραμμών** (αν υπάρχουν) λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους .

α) Αν οι **δύο** γραμμές είναι **ευθείες** και το σύστημα των εξισώσεών τους έχει :

- μοναδική λύση, τότε τέμνονται
- καμία λύση (αδύνατο), τότε είναι παράλληλες
- άπειρες λύσεις (αόριστο), τότε ταυτίζονται .

β) Αν η **μία τουλάχιστον** γραμμή είναι **καμπύλη** (εξίσωση 2ου βαθμού και άνω) και το σύστημα των εξισώσεών τους έχει :

- μία μόνο λύση (διπλή), τότε εφάπτονται
- δύο λύσεις, τότε τέμνονται
- καμία λύση (αδύνατο), τότε είναι μη τεμνόμενες (δεν έχουν κανένα κοινό σημείο).

3 . Μια γραμμή έχει **άξονα συμμετρίας** τον

- y΄y όταν για κάθε ζεύγος Μ(x,y) της C και το Μ΄(-x , y) ανήκει στην C
- x΄x όταν για κάθε ζεύγος Μ(x,y) της C και το Μ΄(x , -y) ανήκει στην C

και έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων όταν για κάθε ζεύγος Μ(x,y) της C και το Μ΄(-x , -y) ανήκει στην C

4 . **Για να βρούμε ένα σημείο μιας γραμμής C** θέτουμε μια αυθαίρετη τιμή (π.χ. $x = 0$) και λύνουμε την εξίσωση ως προς τον άλλο άγνωστο .

5 . **Για να βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε εργαζόμαστε ως εξής :

α) αν η μορφή της εξίσωσης είναι ε: $y = \lambda x + \beta$ ή $y = \lambda x$, τότε λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης . Π.χ. η ευθεία ε : $y = 2x + 5$ έχει $\lambda = 2$.

β) αν η μορφή της εξίσωσης είναι ε: $Ax + By + \Gamma = 0$, τότε $\lambda = -\dfrac{A}{B}$.

γ) αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ είναι δύο σημεία της ε τότε $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

δ) αν η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω τότε $\lambda = εφω$.

6 . **Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας** χρειάζεται να γνωρίζουμε ένα σημείο $Α(x_o,y_o)$ από το οποίο διέρχεται η ευθεία και τον συντελεστή διεύθυνσής της λ . Οπότε τότε :

$$\mathbf{ε : y - y_o = λ (x - x_o)}$$

- Αν $ε // x΄x$ τότε $ε : y = y_o$ και αν $ε // y΄y$ τότε $ε : x = x_o$
- Αν η ε τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0,β) τότε $ε : y = λx + β$
- Αν η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε $ε : y = λ x$
- Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας ε που διέρχεται από γνωστό σημείο Α και είναι **παράλληλη σε γνωστή ευθεία** ζ βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της $λ_ε$ από την σχέση $ε // ζ \Leftrightarrow λ_ε = λ_ζ$.
- Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας ε που διέρχεται από γνωστό σημείο και είναι **κάθετη σε γνωστή ευθεία ζ** βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσής της $λ_ε$ από την σχέση $ε \perp ζ \Leftrightarrow λ_ε \cdot λ_ζ = -1$
- Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας ε που διέρχεται από **δύο γνωστά σημεία** $Α(x_1,y_1)$, $Β(x_2,y_2)$ βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσής της $λ_ε$ από την σχέση $λ_ε = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

7 . Η **απόσταση του σημείου $Α(x_o,y_o)$ από την ευθεία ε** : $Αx + Βy + Γ = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$d(Α , ε) = \frac{|Ax_o + By_o + Γ|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8 . **Το εμβαδό Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ** με $Α(x_1,y_1)$, $Β(x_2,y_2)$ και $Γ(x_3,y_3)$ είναι :

$$Ε = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB}, \vec{AΓ})\right| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|$$

9 . **Για να βρούμε την μεσοπαράλληλη ευθεία** δύο παράλληλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ εργαζόμαστε ως εξής :

α) Βρίσκουμε ένα σημείο Α της $ε_1$ και ένα σημείο Β της $ε_2$.

β) Βρίσκουμε το μέσο Μ του ΑΒ .

γ) η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης .

10 . **Για να βρούμε την εξίσωση της διχοτόμου δ** δύο τεμνόμενων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ εργαζόμαστε ως εξής : Αν Μ(x,y) είναι ένα σημείο της δ τότε $d(Μ,ε_1) = d(Μ,ε_2)$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση.

11 . **Για να βρούμε το συμμετρικό Α΄(x΄,y΄) ενός σημείου Α(x , y) ως προς μια ευθεία ε** εργαζόμαστε ως εξής :

α) Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε.

β) Βρίσκουμε το σημείο τομής Μ των δύο ευθειών .

γ) Το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΑ΄ και από τους τύπους των συντεταγμένων του μέσου βρίσκουμε τις συντεταγμένες του Α΄.

12. Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας **που απέχει από δοσμένο σημείο Κ απόσταση d**, κάνουμε τα εξής:

α) Αν γνωρίζουμε το σημείο $A(x_1,y_1)$ από το οποίο διέρχεται η ευθεία, τότε γράφουμε την εξίσωσή της στη μορφή : $y - y_1 = \lambda\ (x-x_1)$ και από τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία $d(K\ ,\ \varepsilon) = d$ βρίσκουμε τον λ.

β) Αν γνωρίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας , τότε γράφουμε την εξίσωση της ευθείας στη μορφή $y = \lambda x + \beta$ και από τον τύπο της απόστασης βρίσκουμε το β.

13. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας **που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού Ε** κάνουμε ότι και στο (12) μόνο που τον άγνωστο (το λ ή το β) το βρίσκουμε από τον τύπο του εμβαδού του τριγώνου.

14 . **Όταν μας δίνεται η εξίσωση μιας ευθείας που περιέχει παράμετρο λ ή μ τότε :**

α) αν μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι **πράγματι παριστάνει ευθεία** την γράφουμε (αν δεν είναι ήδη) στην μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ και απαιτούμε να μην κάνουν μηδέν ταυτόχρονα τα Α και Β.

β) αν μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι **διέρχεται από σταθερό σημείο Κ** τότε την μετασχηματίζουμε σε πολυώνυμο ως προς λ ή μ και μηδενίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου αυτού. Η λύση του συστήματος , αν υπάρχει , είναι οι συντεταγμένες του σημείου Κ .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) όταν διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -4$.

β) όταν διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και είναι παράλληλη στην ευθεία $4x + y - 12 = 0$.

γ) όταν διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και είναι κάθετη στην ευθεία $x - 4y + 5 = 0$

δ) όταν διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(0,7).

ε) όταν διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και απέχει από το Β(-1,3) απόσταση ίση με $2\sqrt{5}$.

ζ) όταν έχει συντελεστή διεύθυνσης 3 και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 6 τ.μ.

Λύση :

α) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $\varepsilon : y - y_o = \lambda\,(x - x_o)$. Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση:

$$y - 3 = -4\,(x - 1) \Leftrightarrow y = -4x + 4 + 3 \Leftrightarrow 4x + y - 7 = 0.$$

β) Δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Η ευθεία $4x + y - 12 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -4$ ($\lambda = -\frac{A}{B}$) άρα έχει εξίσωση $4x + y - 7 = 0$.

γ) Η ευθεία $x - 4y + 5 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \frac{1}{4}$. Αφού οι δύο ευθείες είναι κάθετες θα ισχύει $\lambda\lambda_1 = -1$. Άρα $\lambda = -4$ και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $4x + y - 7 = 0$.

δ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία είναι

$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{0-1} = -4$, άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $4x + y - 7 = 0$.

ε) Για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία. Καταρχήν, αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(1,3) θα έχει εξίσωση της μορφής : $y - 3 = \lambda\,(x - 1) \Leftrightarrow \lambda x - y - \lambda + 3 = 0$.

Επομένως, ισοδύναμα έχουμε:

$$d(B\,,\varepsilon) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\lambda\cdot(-1) - 3 - \lambda + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |-\lambda - 3 - \lambda + 3| = 2\sqrt{5}^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad |-2\lambda|^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow (-2\lambda)^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 4\lambda^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 5.$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι δύο και έχουν εξισώσεις $5x - y - 2 = 0$ και $5x + y - 8 = 0$.

ζ) Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$, δηλαδή, αφού $\lambda = 3$, $y = 3x + \beta$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες θέτουμε μια φορά το $x = 0$, οπότε $y = \beta$ και μια φορά το $y = 0$, οπότε $x = -\frac{\beta}{3}$. Επομένως η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α($-\frac{\beta}{3}$, 0) και τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0 , β).

Το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{OA},\vec{OB})\right| = \frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix} -\frac{\beta}{3}-0 & 0-0 \\ 0-0 & \beta-0 \end{vmatrix}\ \right| = \left|\frac{-\beta^2}{3}\right| = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta^2 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι $y = 3x + 3\sqrt{2}$ και $y = 3x - 3\sqrt{2}$.

΄Ασκηση 2

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ευθειών:

(ε_1): $2x + 3y + 7 = 0$ και (ε_2): $2x + 3y - 5 = 0$.

Λύση :

Αρχικά διαπιστώνουμε ότι οι δοσμένες ευθείες είναι πράγματι παράλληλες, αφού έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{2}{3}$. Αυτός θα είναι ο συντελεστής διεύθυνσης και της μεσοπαράλληλης.

Θεωρούμε ένα σημείο Α πάνω στην ε_1: π.χ.: για $y = 1$, $x = -5$, άρα Α(-5 , 1). Όμοια βρίσκουμε και ένα σημείο Β πάνω στην ε_2: π.χ.: για $y = 1$, $x = 1$, άρα Β(1 , 1). Το μέσο Μ του ΑΒ θα βρίσκεται πάνω στη μεσοπαράλληλο. Είναι Μ(-2 , 1).

Επομένως αναζητούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ(-2 , 1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{2}{3}$. Αυτή είναι η

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad 3y - 3 = -2x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y + 1 = 0.$$

΄Ασκηση 3

Να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες:

(ε_1): $2x + y - 5 = 0$ και (ε_2): $x - 2y + 8 = 0$.

Λύση :

Έστω Μ(x , y) ένα σημείο της ζητούμενης διχοτόμου. Το σημείο αυτό θα ισαπέχει από τις δύο ευθείες. Δηλαδή: $d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2)$ και ισοδύναμα έχουμε:

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|x-2y+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow \frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}} = \frac{|x-2y+8|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \{2x + y - 5 = x - 2y + 8\} \text{ ή } \{2x + y - 5 = - x + 2y - 8\}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 3y - 13 = 0 \quad \text{ή} \quad 3x - y + 3 = 0$$

Οι τελευταίες είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων των δύο γωνιών που σχηματίζουν οι δοσμένες ευθείες.

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση (Δ_μ): $(\mu + 1)\, x + (\mu - 1)\, y - 4\mu = 0$, $\mu \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε μ, η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από ένα σταθερό σημείο (είναι δηλαδή μια δέσμη ευθειών), το οποίο και να προσδιορίσετε.

γ) Να βρείτε την ευθεία της δέσμης που έχει συντελεστή διεύθυνσης 2.

Λύση :

α) Για να παριστάνει ευθεία μια εξίσωση της παραπάνω μορφής πρέπει τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές των x . y να είναι διάφορος του μηδενός. Στην περίπτωσή μας αυτό συμβαίνει αφού $\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$ και $\mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$.

β) Μετατρέπουμε την εξίσωση σε πολυώνυμο της παραμέτρου μ. Έχουμε:

$$(\mu + 1)\, x + (\mu - 1)\, y - 4\mu = 0 \Leftrightarrow (x + y - 4)\, \mu + (x - y) = 0$$

Για να ισχύει η τελευταία για κάθε μ, πρέπει $\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x = y = 2)$.

Επομένως όλες οι ευθείες διέρχονται από το σταθερό σημείο Α(2 , 2).

(β΄ τρόπος)

Για $\mu = 1$ η εξίσωση γίνεται $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, ενώ για $\mu = -1$ η εξίσωση γίνεται $-2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$. Επομένως οι ΔΥΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ διέρχονται από το σημείο Α(2 , 2). Για να δείξουμε ότι ΟΛΕΣ οι ευθείες διέρχονται από το σημείο αυτό αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις συντεταγμένες του σημείου:

$$(\mu + 1)\, 2 + (\mu - 1)\, 2 - 4\mu = 0 \Leftrightarrow 2\mu + 2 + 2\mu - 2 - 4\mu = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

ΤΩΡΑ ΑΠΟΔΕΙΞΑΜΕ ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο Α(2 , 2).

{Ο β΄ τρόπος θέλει πολύ προσοχή όταν χρησιμοποιείται γιατί αν π.χ. δεν κάνουμε το τελευταίο βήμα είναι ΟΛΟΣ ο τρόπος ΛΑΘΟΣ!!!}

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε ευθείας είναι $\lambda = -\dfrac{\mu+1}{\mu-1}$.

Όμως $-\dfrac{\mu+1}{\mu-1} = 2 \Leftrightarrow -(\mu+1) = 2(\mu-1)$

$\Leftrightarrow -\mu - 1 = 2\mu - 2$

$\Leftrightarrow \mu = \dfrac{1}{3}$.

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση

$$(\frac{1}{3} + 1)x + (\frac{1}{3} - 1)y - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0.$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών (ε_1): $2x - 3y + 1 = 0$ και (ε_2): $4x - 6y + 7 = 0$.

Λύση :

Για να βρούμε την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών αρκεί να βρούμε την απόσταση ενός σημείου της μιας ευθείας από την άλλη ευθεία.

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες αφού έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

Βρίσκουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ε_1. Π.χ. για $x = 1$ είναι $y = 1$ άρα το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην ε_1. Επομένως:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|4\cdot 1 - 6\cdot 1 + 7|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{5}{\sqrt{52}} = \frac{5\sqrt{52}}{52}$$

Άσκηση 6

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών

(ε_1): $x - 2y + 1 = 0$ και (ε_2): $2x - 4y + 3 = 0$.

Λύση :

Η μεσοπαράλληλη ευθεία θα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με τις δύο παράλληλες ευθείες, δηλαδή $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Για να βρούμε ένα σημείο Μ από το οποίο θα διέρχεται θεωρούμε δύο τυχαία σημεία, ένα σημείο Α της ε_1 και ένα σημείο Β της ε_2 και βρίσκουμε το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Το σημείο Α(1,1) ανήκει προφανώς στην ε_1 , ενώ και το σημείο Β(0 , $\frac{3}{4}$) ανήκει στην ε_2. Το μέσο του ΑΒ θα έχει συντεταγμένες Μ($\frac{1+0}{2}$, $\frac{1+\frac{3}{4}}{2}$) δηλαδή Μ($\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$). Η ζητούμενη ευθεία έχει επομένως εξίσωση:

$$y - \frac{7}{8} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{7}{8} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8y - 7 = 4x - 2$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8y + 5 = 0.$$

Άσκηση 7

Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ ώστε οι ευθείες (ε_1): $x+\mu y+1=0$ και (ε_2): $2\mu x+2y+\lambda=0$ να είναι παράλληλες και να απέχουν απόσταση ίση με $2\sqrt{2}$.

Λύση :

Για να είναι παράλληλες οι δύο ευθείες πρέπει να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης:

$$-\frac{1}{\mu} = -\frac{2\mu}{2} \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = \underline{+}1 .$$

Για μ = 1, οι δύο ευθείες έχουν εξισώσεις (ε_1): $x + y + 1 = 0$ και (ε_2): $2x + 2y + \lambda = 0$. Για να βρούμε την απόστασή τους εφαρμόζουμε ότι και στην άσκηση 5. Ένα σημείο της ε_1 είναι το Α(-1 , 0). Άρα αρκεί να βρούμε την απόσταση του Α από την ε_2. Έχουμε:

$$d(A , \varepsilon_2) = \frac{|2\cdot(-1)+2\cdot 0+\lambda|}{\sqrt{2^2+2^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda - 2| = 8$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 10 \text{ ή } \lambda = -6$$

Για μ = -1, οι δύο ευθείες έχουν εξισώσεις (ε_1): $x - y + 1 = 0$ και (ε_2): $-2x - 2y + \lambda = 0$. Για να βρούμε την απόστασή τους εφαρμόζουμε ότι και στην άσκηση 5. Ένα σημείο της ε_1 είναι το Β(0 , 1). Άρα αρκεί να βρούμε την απόσταση του Β από την ε_2. Έχουμε:

$$d(B , \varepsilon_2) = \frac{|2\cdot 0+2\cdot 1+\lambda|}{\sqrt{2^2+2^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda+2|}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda + 2| = 8$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ ή } \lambda = -10$$

Επομένως υπάρχουν τέσσερα ζεύγη τιμών (λ , μ) με τις ζητούμενες ιδιότητες:
(10 , 1) , (-6 , 1) , (6 , -1) και (-10 , -1).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ Γ Ι Α Λ Υ Σ Η

1. Αν η ευθεία y = 2x + β διέρχεται από το σημείο Α(1 , 7), να βρείτε την τιμή του β .
2. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία Α(1 , 4) και Β(-2 , 1). Να βρείτε :

   α) τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε).

   β) τη γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x .

   γ) την εξίσωση της ευθείας (ε) .
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(2 , 3) και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u}$ = (1 , -5).
4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(3 , -1) και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση x = 5 .
5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(3 , 5) και Β(1 , 7).
6. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α(-1 , 3) και είναι παράλληλη προς την ευθεία (ζ) : y = 3x + 7 . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .
7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(5 , -3) και είναι κάθετη στην ευθεία ΚΛ , όπου Κ(2 , 5) και Λ(-1 , 4) .
8. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι ευθείες (ε) : y = (3 + λ) x + 7 και (ζ) : y = ($λ^2$ + 2λ + 1)x + 6 , να είναι παράλληλες .
9. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε οι ευθείες (ε) : y = (λ + 2) x + 7 και (ζ) : y = $\frac{\lambda - 2}{3}$x + 4 να είναι κάθετες .
10. Δύο από τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ έχουν εξισώσεις y = -3x + 11 και y = x + 3. Αν Α(2 , 1) να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών και οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.
11. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(1 , 1). Η διάμεσος ΒΜ και το ύψος ΓΔ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις: x – y + 4 = 0 και 3x + y + 4 = 0. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.
12. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία 2x – y + 1 = 0 και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 4 τ.μ.
13. Να βρεθεί το ύψος ενός τραπεζίου του οποίου δύο πλευρές έχουν εξισώσεις: 3x + 4y – 7 = 0 και 3x + 4y + 13 = 0.
14. Δίνεται η εξίσωση: ($λ^2$ + λ – 2) x + ($λ^2$ – 3λ + 2) y + $λ^2$ – 1. Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι, ώστε:

    α) η εξίσωση αυτή να παριστάνει ευθεία .

    β) η ευθεία αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων .
15. Δίνεται η εξίσωση (ε) : ($μ^2$ –1) x + ($μ^2$ – μ – 6) y + μ + 1 = 0 .

α) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία , για κάθε πραγματικό αριθμό μ .

β) Να βρεθούν οι τιμές του μ , ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του μ , ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα y΄y.

δ) Να βρεθούν οι τιμές του μ , ώστε η ευθεία να είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a} = (4 , 3)$.

16. Δίνονται οι εξισώσεις : $μx + (μ + 1) y + 1 = 0$ και $(μ +1) x + 4μy + μ – 2 = 0$.

    α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθεία, για κάθε μ.

    β) Να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε να είναι παράλληλες οι δύο ευθείες.

17. Δίνονται οι ευθείες $(ε_1) : (μ – 1) x + (μ + 1) y + μ – 3 = 0$ και $(ε_2) : (2μ + 2) x – μy + μ – 2 = 0$.

    Να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε οι δύο ευθείες να είναι κάθετες .

18. Να βρεθεί η απόσταση :

    α) του σημείου Α(5 , -7) από την ευθεία $y + 4 = 0$.

    β) του σημείου Β(-3 , 6) από την ευθεία $x – 5 = 0$.

    γ) του σημείου Γ(5 , -5) από την ευθεία $6x – 8y – 5 = 0$.

19. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Α(-3 , 1) ως προς την ευθεία $y = -4x + 6$.

20. Να αποδειχτεί ότι οι ευθείες $(3λ – 1) x + (λ – 1) y + 4 – 8λ = 0$ διέρχονται από σταθερό σημείο, για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

21. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $αx + βy + γ = 0$ με $α + β + γ = 0$ διέρχονται από σταθερό σημείο.

22. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x , y) για τα οποία ισχύει: $2x^2 – 3xy + y^2 = 0$.

23. Αν $α \in \Re$, να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου Α(α , 0) και Β(0 , α + 2γ), με $γ \neq 0$, διέρχεται από σταθερό σημείο.

24. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες με εξισώσεις $2μx – y + 2 = 0$ και $(1 + 2μ)x + (2μ – 1) y + 1 = 0$.

25. Δίνεται η εξίσωση $(λ + 2μ + 1) x + (λ + μ + 2) y – 3λ – 4μ – 5 = 0$.

    α) Να βρεθούν οι τιμές των λ και μ ώστε η εξίσωση αυτή να παριστάνει ευθεία .

    β) Να αποδειχτεί ότι η παραπάνω ευθεία διέρχεται από σταθερό σημείο όταν τα λ και μ μεταβάλλονται .

26. Από το σημείο Ρ(1 , 1) διέρχονται δύο κάθετες ευθείες οι οποίες τέμνουν τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Αν Μ είναι η προβολή του σημείου Ρ στην ευθεία ΑΒ, να αποδειχτεί ότι το Μ κινείται σε μια ευθεία .

27. Οι θέσεις δύο πλοίων στο χάρτη ενός λιμεναρχείου είναι: Α(2t + 1 , t + 2) και Β(3t + 2 , 6t + 1), όπου $t \geq 0$ είναι ο χρόνος σε ώρες. Να βρεθούν:

    α) Οι πορείες των πλοίων Α και Β .

    β) Οι συντεταγμένες του λιμανιού Λ στο οποίο θα φτάσουν και τα δύο πλοία .

γ) Σε πόση ώρα μετά την αναχώρησή του το πλοίο Α θα φτάσει στο λιμάνι Λ ;

28. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) : $3x – 10y – 7 = 0$ και (ε_2) : $x – 4y – 3 = 0$ και το σημείο Α(1 , -2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής Ρ των δύο παραπάνω ευθειών και είναι κάθετη στην ευθεία ΡΑ .

β) Να βρείτε ένα σημείο Β στην (ε_2) ώστε το μέσο Μ του ΑΒ να ανήκει στην ευθεία (ε_1).

29. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x , y) για τα οποία ισχύει:

$$x^2 + y^2 – 2xy – 3x + 3y + 2 = 0$$

30. Δίνονται τα σημεία Α(1,2) και Β(2,1). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου για τα οποία είναι : $MA^2 – MB^2 = 8$.

31. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy ένα πλοιάριο ξεκινά από το λιμάνι Λ και κατευθύνεται στο λιμάνι Ο. Το ραντάρ θέσης δίνει συντεταγμένες για το πλοιάριο $(3t – 30 , 2t – 40)$, για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.

α) Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι Λ ;

β) Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα δύο λιμάνια ;

γ) Ποιά είναι η εξίσωση της πορείας του πλοιαρίου ;

δ) Να εξετάσετε αν το πλοιάριο πρέπει να αλλάξει πορεία για να φτάσει στο λιμάνι Ο .

32. Δίνονται οι ευθείες : $(\lambda^2 + 1)\, x + (\lambda^2 – 1)\, y – \lambda = 0$ και $(\lambda + 1)\, x + (\lambda – 1)\, y – \lambda^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι αν οι ευθείες έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο, τότε αυτό κινείται πάνω σε μια ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται.

33. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x , y) για τα οποία είναι $x^2 – y^2 +3x – y + 2 = 0$ είναι δύο κάθετες ευθείες .

34. Δίνονται τα σημεία Α(-2 , -1) και Β(2 , 2) . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία το τρίγωνο ΑΒΜ έχει εμβαδό ίσο με 8 τ.μ.

35. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 + 2xy – 2x – 2y – 3 = 0$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλής τους.

36. 37. Να βρείτε τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $x + 2y – 5 = 0$ και $2x + y – 7 = 0$. Ποιά είναι η εξίσωση της διχοτόμου της οξείας γωνίας;

37. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy η εξίσωση

$$(\lambda – 1)\, x + (\lambda + 1)\, y – \lambda – 3 = 0 , \lambda \in \Re$$

περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2 , 2) , Λ(-1 , 5) και Μ(1 , 3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτινών που διέρχονται από τα σημεία Κ , Λ και Μ.

γ) Να προσδιορίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στην φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το Μ .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από τον φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ .

38. Ένα κινητό Α ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται στην ευθεία $ε_1$, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $ε_2$ της κίνησης ενός άλλου κινητού Β . Τα δύο κινητά συναντώνται στο σημείο (3 , 4) . Στο ίδιο σημείο φθάνει και ένα τρίτο κινητό Γ , το οποίο κινείται πάνω στην ευθεία $ε_3 : x + λy + 1 = 0$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$.

β) Στη συνέχεια τα κινητά αναχωρούν και ακολουθώντας διαφορετικές διαδρομές από αυτές που είχαν μέχρι το σημείο συνάντησής τους , σταματάνε στα σημεία Α(8συνφ , 9ημφ), Β(8ημφ , -9συνφ) και Γ(8 , 9) αντίστοιχα ώστε $φ \in (0 , \frac{\pi}{2})$.

i) Να προσδιορίσετε την γωνία φ ώστε τα κινητά να βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ii) Πόσο απέχει τότε κάθε κινητό από την ευθεία που κινούνταν αρχικά ;

39. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη της ευθείας $2x-y+3=0$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 4 τμ.

40. Αν το σημείο Α(α , β) κινείται πάνω στην ευθεία $2x - 3y + 4 = 0$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(α + 3 , 2β - 1).

41. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που η απόστασή τους από την ευθεία (ε): $2x – y – 1 = 0$, είναι τριπλάσια από την απόστασή τους από την ευθεία (ζ): $x + 2y – 2 = 0$.