ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1ου ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $\vec{\alpha}$ = (2x – y , x + 2y – 4), $\vec{\beta}$ = (x – 3y + 2 , -3x +2y – 2), $\vec{\gamma}$ = (3 , -2) και $\vec{\delta}$ = (-3 , 4), τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$. (μονάδες 20)

β) Να βρείτε τη σχέση ανάμεσα στα x και y ώστε $\vec{u} \parallel \vec{\delta}$. (μονάδες 15)

γ) Να υπολογιστούν τα x και y αν είναι $\vec{u} = \vec{0}$. (μονάδες 15)

Λύση:

α) Είναι $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ = (2x – y , x + 2y – 4) + (x – 3y + 2 , -3x +2y – 2) + (3 , -2) =

= (2x – y + x – 3y + 2 + 3 , x + 2y – 4 – 3x + 2y – 2 – 2) =

= (3x – 4y + 5 , -2x + 4y – 8)

β) Για να είναι $\vec{u} \parallel \vec{\delta}$ πρέπει η ορίζουσα των συντεταγμένων τους να είναι ίση με το 0, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} 3x-4y+5 & -3 \\ -2x+4y-8 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\,(3x – 4y + 5) – (–3)\,(–2x + 4y – 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x – 16y + 20 – 6x + 12y – 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x – 4y – 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x – 2y – 2 = 0}$$

γ) Για να είναι το $\vec{u} = \vec{0}$, πρέπει οι συντεταγμένες του να είναι και οι δύο ίσες με το 0. Επομένως προκύπτει το παρακάτω σύστημα, το οποίο και λύνουμε:

$$\begin{cases} 3x-4y+5=0 \\ -2x+4y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=-5 \\ -2x+4y=8 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε x = 3 και αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι y = $\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$. Άρα τελικά (x , y) = (3 , $\frac{7}{2}$).

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{4}$, καθώς και το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$. Να βρείτε :

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$. (20 μονάδες)

β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$. (15 μονάδες)

γ) Την γωνία φ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$. (15 μονάδες)

Λύση:

α) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}^2$.

Όμως $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$

και $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 4$.

Άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = 4 - 8 = -4$.

β) $|\vec{u}|^2 = |\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|^2 = \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}^2 = 8 - 16 + 16 = 8$.

Άρα $\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{|\vec{\alpha}||\vec{u}|} = \frac{-4}{2\cdot2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.