ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – 1ο

1η: Για να αποδείξουμε μια διανυσματική ισότητα, θεωρούμε ως διανυσματική αρχή ένα σημείο της δοσμένης σχέσης και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα με σημείο αναφοράς το σημείο αυτό.

2η: Όταν μας ζητούν να προσδιορίσουμε ένα σημείο το οποίο ικανοποιεί μια διανυσματική ισότητα χρησιμοποιούμε ως σημείο αναφοράς ένα σταθερό σημείο του σχήματος και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της ισότητας μέσω αυτού του σημείου. Την ισότητα που προκύπτει την επιλύουμε ως προς τη διανυσματική ακτίνα του ζητούμενου σημείου.

3η: Για να αποδείξουμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι παράλληλα αποδεικνύουμε ότι το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου ή ότι είναι παράλληλα προς ένα τρίτο διάνυσμα.

4η: Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αποδεικνύουμε ότι δύο από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Gamma}$ (ή τα αντίθετά τους) είναι συγγραμμικά.

5η: Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, όταν γνωρίζουμε σχέσεις με τα μέτρα τους χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

- Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα αν και μόνο αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$
- Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα αν και μόνο αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right|$

* * * * * * * * * * * * *

1) Να αποδείξετε ότι για έξι τυχαία σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ισχύει:

$$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ στο επίπεδο του τριγώνου τέτοιο, ώστε να ισχύει: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$.

3) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \kappa\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \kappa\overrightarrow{A\Gamma}$ να δείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E} // \overrightarrow{B\Gamma}$ (κ, λ ϵ ℝ).

4) Αν για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ ισχύει $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

5) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 4|\vec{\gamma}|, |\vec{\beta}| = 3|\vec{\gamma}|$ τότε να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \upuparrows \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

6) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε πάνω στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε να ισχύουν: $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B\Gamma}$. Αν Μ το σημείο τομής των ΒΔ και ΑΕ, να εκφράσετε το $\overrightarrow{\Gamma M}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma}$.

* * * * * * * * * * * *

1. α) Αν ΑΜ είναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ , δείξτε ότι $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma}$

β) Αν ΑΜ , ΒΝ και ΓΡ είναι οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ , δείξτε ότι

$$\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{\Gamma P} = \vec{0}$$

2. Να βρείτε σημείο Ο του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ τέτοιο ώστε :

$$\vec{AO} + 2\vec{BO} + 3\vec{\Gamma O} = \vec{0}$$

3. Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ο του επιπέδου . Αν

$$\vec{OA} + \vec{O\Gamma} = \vec{OB} + \vec{O\Delta}$$

να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ . Να προσδιοριστεί σημείο Μ του επιπέδου τέτοιο, ώστε: $\vec{A\Gamma} + \vec{BM} = \vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta}$

5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ , Λ των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι : $\vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} = 2\vec{K\Lambda}$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της ΑΓ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{M\Delta} = \vec{\Gamma B}$ και $\vec{ME} = \vec{BA}$. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα σημεία Δ , Α και Ε είναι συνευθειακά.

β) ΑΔ = ΑΕ

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα μεταβλητό σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{M\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο από το σημείο Μ .

8. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ όταν:

α) $\frac{2}{3}(\vec{x} + 5\vec{a}) = \frac{3}{2}(\vec{x} + 5\vec{\beta})$ β) $2\vec{x} - 3(\vec{a} - \vec{x}) = 3\vec{\beta} + 2(\vec{x} - 3\vec{a})$

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Αν $\vec{AB} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{A\Gamma} = 5\vec{a} - \vec{b}$ και Δ ένα τυχαίο σημείο τέτοιο , ώστε $\vec{A\Delta} = 11\vec{a} - 5\vec{b}$, να αποδείξετε ότι :

α) Τα σημεία Β , Γ και Δ είναι συνευθειακά .

β) ΒΔ = 3 ΒΓ .