

• **Ισότητα - Πράξεις με συναρτήσεις**

Π1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

i) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f .

α) $f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

β) $f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$

γ) $f_3(x) = (\sqrt{x + 1})^2$

δ) $f_4(x) = x\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

ε) $f_5(x) = \ln e^{x+1}$

στ) $f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$

ii) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

Π2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2\lambda x^2 - 2x - \lambda^2 + 3\lambda}{x^2 - \lambda x + 1}$ και $g(x) = 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Βρείτε το λ ώστε να είναι $f=g$.

Π3. Να βρείτε τις συναρτήσεις: α) $f + g$ β) $f \cdot g$ γ) $\frac{f}{g}$ όπου :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Π4. Να αποδείξετε ότι αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) + g^2(x) \leq 2f(x)g(x)$ τότε $f=g$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$f_2(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	$f_3(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$
$f_4(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}}$	$f_5(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f_6(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε (αν υπάρχει) το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι $f=g$.

Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο να έχουμε $f=g$.

α) $f(x) = \sqrt{(1-x)^2}$ και $g(x) = x-1$

β) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+1}}$ και $g(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+1}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να μελετήσετε ως προς την ισότητα τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = \frac{3x^2 - 2|x|}{x^2}$ και $g(x) = \frac{3|x| - 2}{|x|}$ [Απ.: $f=g$]

β) $f(x) = \frac{1+\sin x}{\eta\mu x}$ και $g(x) = \frac{\eta\mu x}{1-\sin x}$ [Απ.: $f=g$]

γ) $f(x) = \frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x}$ και $g(x) = \frac{2}{\eta\mu^2 x}$ [Απ.: $f=g$]

δ) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$ και $g(x) = \ln(x-1) + \ln(x-3)$ [Απ.: $f \neq g$ αλλά $f=g$ στο $(3, +\infty)$]

ε) $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}{(x-1)^2}$ και $g(x) = \frac{x+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ [Απ.: $f=g$]

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \frac{2x^2 + 2\alpha x + \alpha}{2(x^2 - 1)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Για ποια τιμή του α ισχύει $f = g$; [Απ.: $\alpha=2$]

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(2\lambda-1)x+4\lambda}{x+\lambda^2}$ και $g(x) = \frac{\lambda^2 x + 4\lambda^3}{x+3\lambda-2}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Βρείτε το λ ώστε να είναι $f=g$ [Απ.: $\lambda=1$]

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{7-x}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α το πεδίο ορισμού της που αναγράφεται στην στήλη Β :

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
	α) [3,7]
1. f	β) $(-\infty, 7]$
2. g	γ) [3,7]
3. f+g	δ) (3,7]
4. f·g	ε) [3,+∞)
5. $\frac{f}{g}$	στ) $\mathbb{R} - \{3\}$
6. $\frac{g}{f}$	ζ) $\mathbb{R} - \{7\}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{f(x)}{g^2(x)+1} = \frac{g(x)}{f^2(x)+1}$ να δείξετε ότι $f=g$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να αποδείξετε ότι αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $2[f^2(x)+g^2(x)] = [f(x)+g(x)]^2$ τότε $f=g$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να βρείτε την συνάρτηση $f+g$ όταν είναι

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \leq 2 \\ 2\sqrt{x} + 1 & \text{αν } x > 2 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} -2\sqrt{x} & \text{αν } 0 \leq x < 3 \\ -x+3 & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

Σε ποιο διάστημα η $f+g$ είναι σταθερή;

• **Σύνθεση Συναρτήσεων**

Π1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-3}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Π2. . Αν $g(x)=x-1$, βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x)=x^2+3x+1$.

Π3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{\lambda x-10}{2x-5}$ και $l(x)=x$ ορισμένες στο $\mathbb{R}-\{\frac{5}{2}\}$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f \circ l = l$.

Π4. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν **α)** $f(x) = \eta\mu(x^2+1)$ **β)** $f(x) = 2\eta\mu^2 3x + 1$ **γ)** $f(x) = \ln(e^{2x}-1)$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν $f(x) = \alpha x - \beta$ και $g(x) = 3x - 5$, βρείτε συνθήκη για τους α, β ώστε να ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, η οποία ως γνωστόν ονομάζεται και γραμμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Να εξετάσετε αν το άθροισμα δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Το ίδιο και για το γινόμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = x^2 - 6x + 11$ βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$ και λύστε την εξίσωση $f \circ g(x) = x - 3$. Βρείτε την συνάρτηση $f \circ f$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$ ως σύνθεση δύο άλλων συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να εκφράσετε την συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων.

α) $f(x) = \eta\mu(4x^2+1)$

β) $f(x) = 2^{\sqrt{1-\sin x}}$

γ) $f(x) = -4\epsilon\phi^2 x + 3\epsilon\phi x + 2009$

δ) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Αν $g(x) = \frac{x}{x+1}$, βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} ώστε να ισχύει

$$g \circ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Αν $\varphi(x) = 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x^2)$ τότε η συνάρτηση φ είναι σύνθεση των συναρτήσεων :

- Α) $f(x) = 3(\frac{\pi}{2} - x^2)$, $g(x) = \eta\mu x$
 Β) $f(x) = 3\eta\mu x$, $g(x) = x^2$
 Γ) $f(x) = 3\eta\mu x$, $g(x) = \frac{\pi}{2} + x$, $h(x) = -x^2$
 Δ) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = \eta\mu x$, $h(x) = \frac{\pi}{2} - x$
 Ε) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3(\frac{\pi}{2} - x)$, $h(x) = \eta\mu x$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Αν $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \eta\mu x$ τότε η $f \circ g$ ορίζεται στο

- Α) $[0, +\infty)$
 Β) $(-\infty, 1]$
 Γ) $[-1, 1]$
 Δ) \mathbb{R}
 Ε) Κανένα από τα παραπάνω

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ).

- | | | | |
|-----|---|---|---|
| α) | Για δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο \mathbb{R} ισχύει $f \circ g = g \circ f$ | Σ | Λ |
| β) | Για οποιαδήποτε συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} ισχύει $f \circ f = f^2$ | Σ | Λ |
| γ) | Αν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ τότε ορίζεται και η συνάρτηση $g \circ f$ | Σ | Λ |
| δ) | Η συνάρτηση $f \circ f$ ορίζεται πάντα | Σ | Λ |
| ε) | Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στα A και B αντίστοιχα τότε η $f \circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$ | Σ | Λ |
| στ) | Η σύνθεση της συνάρτησης f με την g είναι η $g \circ f$ | Σ | Λ |
| ζ) | Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(g(x)) = g(f(x))$ τότε $f = g$ | Σ | Λ |