ΜΑΘΗΜΑ 1

ΕΝΝΟΙΑ ΣΥΝΟΛΟΥ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Α) ΣΥΝΟΛΟ: Λέγεται μια ομάδα αντικειμένων ή ατόμων.

πχ1 Α: το σύνολο των βιβλίων μου.

πχ2 Β:

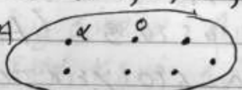
πχ3 Γ:

Β) ΤΡΟΠΟΙ ΓΡΑΦΗΣ ΣΥΝΟΛΟΥ.

πχ1) 1ος με περιγραφή Α: Τα φωνήεντα.

2ος με αναγραφή $A = \{\alpha, o, ., ., ., .\}$

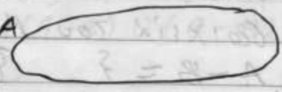
3ος με διάγραμμα Venn Α



πχ2) με περιγραφή $A = \{x$ ακέραιος $/ -2 \leq x < 4\}$

με αναγραφή $A = \{ \quad \}$

με διάγραμμα. Α



πχ3) με περιγραφή $A = \{x$ πραγματικός $/ x^2 = \quad \}$.

με αναγραφή $A = \{ \quad \}$.

με διάγραμμα. Α

Γ) ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ

$A = \{x$ ακέραιος $/ (x-1)(x-2) = 0\}$ ή $A = \{ \quad \}$

$B = \{x$ φυσικός $/ 0 < x < 3\}$ ή $B = \{ \quad \}$

Τα σύνολα Α, Β περιέχουν τα ... στοιχεία άρα λέγονται ... και γράφω $A = B$.

Δ) ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ πχ1) $A = \{1, 2, 3, 2013\}$, $B = \{2, 3\}$

Το Β λέγεται υποσύνολο του Α, $B \subseteq A$

όταν όλα τα ... του Β ανήκουν στο ...

πχ2) $A = \{x$ ακέραιος $/ x^2 + 5 = 14\}$, $B = \{1, 2, 3, -1, -3\}$

είναι $A = \{ \quad \}$, άρα είναι ... $\subseteq$ ...

ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ $\{ \quad \}$ ή $\emptyset$.

πχ. $A = \{x$ ακέραιος $/ x^2 = 5\}$.

Ε) ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ. π.χ.

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 6\}$.
Τα A, B είναι υποσύνολα του Ω δηλαδή $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$.

1) Συμπληρωματικό του A λέγεται το $A' = \{2, 4, 6\}$
Συμπληρωματικό του B λέγεται το $B' = \{ \quad \}$

2) ΕΝΩΣΗ του A με το B $(A \cup B)$ λέγεται ένα σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B.
δηλαδή $A \cup B = \{ \quad \}$.

3) ΤΟΜΗ του A με το B $(A \cap B)$ λέγεται ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν στο A και στο B ταυτόχρονα
δηλαδή $A \cap B = \{ \quad \}$.

4) ΔΙΑΦΟΡΑ του B από το A. $(A - B)$ λέγεται ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του A εκτός τα κοινά με το B.
δηλαδή $A - B = \{ \quad \}$.
ομοίως $B - A = \{ \quad \}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΥΜΒΟΛΑ $\boxed{x \in \Omega}$ (το x ανήκει στο Ω), $\boxed{x \notin \Omega}$ (το x δεν ανήκει στο Ω)

π.χ.

$\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$A = \{x$ στοιχείο του $\Omega \,/\, x \leq 6\}$ δηλαδή $A = \{ \quad \}$
$B = \{x$ στοιχείο του $\Omega \,/\, 5 \leq x < 9\}$ δηλαδή $B = \{ \quad \}$

Να υπολογίσετε.

1) $A' = \{ \quad \}$, $B' = \{ \quad \}$.
2) $A \cup B = \{ \quad \}$, $A \cap B = \{ \quad \}$
3) $A - B = \{ \quad \}$, $B - A = \{ \quad \}$.
4) $A' \cup B' = \{ \quad \}$, $(A \cap B)' =$
Παρατηρώ ότι
5) $(A \cup B)' = \{ \quad \}$, $A' \cap B' = \{ \quad \}$
Παρατηρώ ότι.
6) $(A - B) \cup (B - A) = \{ \quad \}$
7) $(A \cap B') \cup (B \cap A') = \{ \quad \}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Να γράψετε με αναγραφή και διάγραμμα Venn τα σύνολα.
$A = \{x$ φυσικός αριθμός $/ \ x < 5\}$.
$B = \{x$ πραγματικός αριθμός $/ \ x^2 = 36\}$
$\Gamma = \{x$ φυσικός αριθμός $/ \ 5 \le x < 8\}$.
Δ: τα ονόματα των ατόμων της οικογένειας σου.

2) Να γράψετε με περιγραφή δύο σύνολα που είναι ίσα.
3) Να γράψετε με περιγραφή δύο σύνολα A, B ώστε $A \subseteq B$.
4) Να γράψετε με περιγραφή ένα κενό σύνολο
5) Αν $\Omega = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A = \{2, 6, 8\}$, $B = \{4, 6, 8\}$
να υπολογίσετε i) A', B', $A \cup B$, $A \cap B$
ii) $A - B$, $B - A$, $(A-B) \cup (B-A)$
iii) $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$
iv) $A' \cup B'$, $A' \cap B'$

6) Αν $\Omega = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$A = \{x \in \Omega \ / \ 1 < x \le 7\}$, $B = \{x \in \Omega \ / \ x < 7\}$.
i) Να γράψετε με αναγραφή τα A, B.
ii) Να υπολογίσετε A', B', $A' \cup B'$, $A' \cap B'$
iii) Να υπολογίσετε $A \cup B$, $A \cap B$
iv) Να υπολογίσετε $A - B$, $B - A$, $(A-B) \cup (B-A)$

ΜΑΘΗΜΑ 2

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ. - ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ.

Α) Πείραμα τύχης 1) ρίχνω ένα νόμισμα.
2) ρίχνω ένα ζάρι 3) κλήρωση λαχείου.
4) Από τους μαθητές της τάξης επιλέγω τυχαία έναν
5) 6)

Β) Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης
ενδεχόμενο λέγεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου

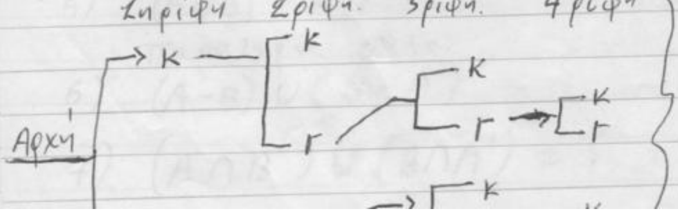
Πχ1) ρίχνω ένα ζάρι.
Δειγματικός χώρος $\Omega = \{ \quad \}$
Το ενδεχόμενο να έρθει περιττός αριθμός είναι $A = \{ \quad \}$.

Πχ2) ρίχνω ένα νόμισμα δύο φορές.
Δειγματικός χώρος $\Omega = \{ \quad \}$.
το ενδεχόμενο να έρθουν δύο όμοιες πλευρές $A = \{ \quad \}$.

Πχ3) Τρία άτομα Κ, Ν, Π μετέχουν σε ένα διαγωνισμό.
Ο πρώτος κερδίζει ένα ακριβό δώρο ο δεύτερος ένα μικρό
Να γράψετε το δειγματικό χώρο.
$\Omega = \{ KN, \quad \}$

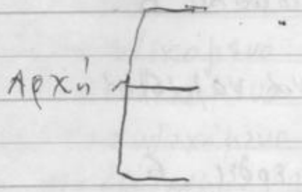
Πχ4) ρίχνω ένα ζάρι 2 φορές.
Δειγματικός χώρος $\Omega = \{$
Το ενδεχόμενο: το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι 7
είναι $A = \{ \quad \}$
Το ενδεχόμενο: οι δύο ενδείξεις να διαφέρουν κατά 1.
είναι $B = \{$

Πχ5) ρίχνω ένα νόμισμα μέχρι να φέρει 2Κ ή 3Γ.
προσοχή όταν το πείραμα είναι περίπλοκο τότε κάνω δενδροδιάγραμμα



άρα δειγματικός χώρος
$\Omega = \{ KK, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma K,$
$K\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma K$
$\Gamma K\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma KK$

Πχ6| Μια κάλπη περιέχει 3 μπάλες Κ, Α, Μ.
Επιλέγω μια μπάλα γράφω το χρώμα. την επανατοποθετώ και επιλέγω μια δεύτερη.
Δενδροδιάγραμμα.



Δειγματικός χώρος $\Omega = \{$

Α: Το ενδεχόμενο να έχω δύο μπάλες ίδιου χρώματος
Β: Το ενδεχόμενο να έχω δύο μπάλες με πρώτη Κ:
Γ: Το ενδεχόμενο να έχω τουλαχ. Μ:
Δ: Το ενδεχόμενο να έχω το πολύ Α

Είναι

$A =$

$B =$

$\Gamma =$

$\Delta =$

$A \cap B =$

$\Gamma \cup \Delta =$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ρίχνω ένα νόμισμα 3 φορές
α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος
β) Να γράψετε το ενδεχόμενο να έρθει δύο τουλάχ. Κ.
γ) Να γράψετε το ενδεχόμενο να έρθει δύο το πολύ Κ.

2) Ρίχνω ένα ζάρι και στη συνέχεια ένα νόμισμα.
α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος
β) Να βρεθεί το ενδεχόμενο το ζάρι να έρθει 6.

3) Μια κάλπη περιέχει 4 σφαίρες χρώματος Μ, Κ, Α, Π. Επιλέγω μια σφαίρα καταγράφω το χρώμα και χωρίς να την επανατοποθετήσω επιλέγω μια δεύτερη:
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο
β) Να γράψετε το ενδεχόμενο μια τουλάχ να είναι Π

4) Ένα ζάρι τετράεδρο πυραμίδα  έχει στις έδρες του τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Το ρίχνω διαδοχικά δύο φορές
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο
β) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Α: το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι 5
γ) Να βρεθεί το ενδεχόμενο Β: οι δύο ενδείξεις να διαφέρουν κατά 1
δ) Να βρεθεί $A \cup B$, $A \cap B$.

5) Δύο άτομα Α, Β παίζουν τάβλι. Νικητής θεωρείται όποιος κερδίσει 2 αγώνες α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο β) Να βρεθεί το ενδεχόμενο να γίνουν μόνο 2 αγώνες.

ΜΑΘΗΜΑ 3

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

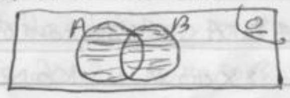
Έστω Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος ρίχνω ένα ζάρι
A: το ενδεχόμενο να έρθει αριθμός μεγαλύτερος του 3
B: το ενδεχόμενο να έρθει αριθμός περιττός.
Είναι $\Omega = \{ \quad \}$

(1) το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το A είναι $A = \{ \quad \}$
Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το B είναι $B = \{ \quad \}$

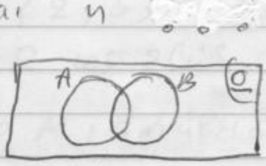
(2) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί το A είναι $A' = \{ \quad \}$
με διάγραμμα Venn

Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί το B είναι $B' = \{ \quad \}$
με διάγραμμα Venn

(3) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A, B δηλαδή (το A ή το B) είναι η ένωση.
$A \cup B = \{ \quad \}$

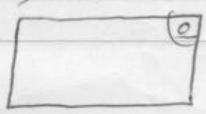


(4) το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A, B δηλαδή (το A και το B) είναι η . . . .
$A .. B = \{ \quad \}$



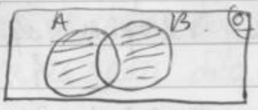
(5) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το A και όχι το B είναι $A - B = \{ \quad \}$
(ή $A \cap B'$)

Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το B και όχι το A είναι $B - A = \{ \quad \}$
(ή $B \cap A'$)



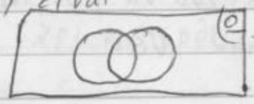
(6) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A, B (ή A ή B) είναι:

$(A-B)\cup(B-A) = \{\quad\}$



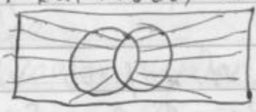
(7) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί ούτε το A ούτε το B (κανένα από τα δύο) είναι

$(A\cup B)' = \{\quad\}$



(8) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A, B (όχι συγχρόνως και τα δύο) είναι

$(A\cap B)' = \{\quad\}$



(9) <u>ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ</u> λέγονται δύο ενδεχόμενα που δεν έχουν κοινά στοιχεία

πχ $A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,6\}$

τότε $A\cap B=\emptyset$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(1) Έστω $Ω = \{2, 4, 6, 8, 0\}$.

$A = \{0, 4, 6\}$ $B = \{0, 2, 6\}$

Να βρεθούν τα ενδεχόμενα

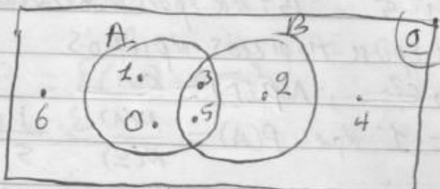
α) Να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A, B.

β) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A, B.

γ) Να πραγματοποιηθεί ένα το πολύ από τα A, B

δ) Να πραγματοποιηθεί ένα ακριβώς από τα A, B

(2)



Από το παραπάνω σχήμα να βρεθούν

α) ο δειγματικός χώρος $Ω$

β) τα ενδεχόμενα A, B, $A \cup B$, $A \cap B$

γ) το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το A

δ) το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το B

ε) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί ούτε το A ούτε το B

3) Έστω $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3, 4\}$.

Ορίζω το δειγματικό χώρο $Ω$ ως εξής

$Ω = \{(α, β)$ με $α$ ανήκει στο M, $β$ ανήκει στο $N\}$

και τα ενδεχόμενα.

A: Το άθροισμα των δύο ενδείξεων $α + β = 5$

B: οι δύο ενδείξεις διαφέρουν κατά 1.

α) Να βρεθούν τα $Ω, A, B$

β) Να βρεθούν τα $A - B$, $B - A$.

γ) Να βρεθούν τα $(A - B) \cup (B - A)$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟΥ

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Εστω Ω ενας δειγματικός χώρος με ν ισοπίθανα στοιχεία και ένα ενδεχόμενο Α με κ στοιχεία. Ονομάζω πιθανότητα του Α τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\nu}{\kappa}$$

(Πχ1) Ρίχνω ένα ζάρι να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: Να ερθει 5 Β: Να ερθει αποτέλεσμα μικρότερου του 5 Γ: Να έρθει περιττός αριθμός

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $N(\Omega) = 6$

$A = \{5\}$ τοτε $N(A) = 1$ αρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5}$

$B = \{\quad\}$. $N(B) =$ αρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} =$

$\Gamma = \{\quad\}$ $N(\Gamma) =$ αρα $P(\Gamma) = \frac{\quad}{\quad} =$

ΠΡΟΣΟΧΗ/ Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει αμεσα

1) $P(\Omega) = \frac{\quad}{\quad} =$

2) $P(\emptyset) = \frac{\quad}{\quad} =$

(Πχ2) Μια κάλπη έχει 5 Άσπρες μπάλες 7 κοκκινες και 8 μαύρες μπάλες Επιλέγω Τυχαία μια μπάλα να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

Α: Η μπάλα είναι άσπρη

Β: Η μπάλα είναι άσπρη ή κόκκινη

Γ: Η μπάλα δεν είναι ούτε άσπρη ούτε κόκκινη

Δ: Η μπάλα είναι άσπρη ή δεν είναι κόκκινη

Είναι

$N(A) = 5$ αρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{20} = \frac{5 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{25}{100} = 25\%$

$N(B) =$ αρα $P(B) =$

$N(\Gamma)=$ άρα $P(\Gamma)=$

$N(\Delta)=$ άρα $P(\Delta)=$

ΠΧ3 Ρίχνω ένα ζάρι 2 φορές και έστω τα ενδεχόμενα

A: Το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7

B: Το γινόμενο των ενδείξεων είναι 12

Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

α) $P(A)$ β) $P(B)$ γ) $P(A\cup B)$ δ) $P(A\cap B)$ ε) $P(A-B)$

α) $\Omega=\{(1,1),(1,2)\ldots(6,6)\}$ τότε $N(\Omega)=$

$A=\{\quad\}$ τότε $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=$

β) $B=\{\quad\}$ τότε $P(B)=$ ——

γ) $(A\cup B)=\{\quad\}$

τότε $P(A\cup B)=$ ——

δ) $A\cap B=\{\quad\}$ τότε $P(A\cap B)=$ ——

ε) $A-B=\{\quad\}$ τότε $P(A-B)=$ ——

ΠΧ3 Ένα κουτί περιέχει μπάλες κόκκινες (Κ) πράσινες (Π) και μαύρες σύνολο 20

Επιλέγω τυχαία μια μπάλα. Η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K)=\frac{7}{20}$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη ή πράσινη είναι $6/10$.

α) Να βρείτε πόσες μπάλες είναι κόκκινες, πράσινες, μαύρες

β) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα να είναι μαύρη ή πράσινη

α) $P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)}\Rightarrow\frac{7}{20}=\frac{N(K)}{20}\Leftrightarrow N(K)=7$

β) $P(K \text{ ή } \Pi)=\frac{N(K \text{ ή } \Pi)}{N(\Omega)}\Rightarrow\frac{6}{10}=\frac{N(K \text{ ή } \Pi)}{20}\Leftrightarrow N(K \text{ ή } \Pi)=$ άρα

$N(\Pi)=20-\quad=$

γ) $N(M)=20-\quad=$ άρα $P(M \text{ ή } \Pi)=$ ——

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(1) Ένα λύκειο έχει 80 μαθητές στην Α' τάξη 70 μαθητές στην Β τάξη 50 μαθητές στην Γ τάξη.
Επιλέγω τυχαία έναν μαθητή να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων
Α: ο μαθητής είναι της Α' τάξης
Β: ο μαθητής δεν είναι της Α' τάξης
Γ: ο μαθητής είναι της Α ή Β τάξης
Δ: ο μαθητής είναι της Α ή δεν είναι της Β

(2) Ένα Λύκειο έχει συνολικά 200 μαθητές και στις τρείς τάξεις, και η Γ τάξη έχει 50 μαθητές.
Επιλέγω τυχαία έναν μαθητή. Η πιθανότητα να είναι μαθητής της Α' τάξης είναι 40%.
α) Πόσους μαθητές έχει κάθε τάξη.
β) Να βρεθεί η πιθανότητα ο μαθητής να είναι της Β' ή Γ τάξης
γ) Να βρεθεί η πιθανότητα ο μαθητής να μην είναι της Β τάξης.

(3) Μια κάλπη έχει τρείς μπάλες χρώματος ΑΣΠΡΟ (Α), ΜΑΥΡΟ (Μ), ΚΟΚΚΙΝΟ (Κ). Επιλέγω μια μπάλα γράφω το χρώμα της και στη συνέχεια την επανατοποθετώ και επιλέγω μια δεύτερη και γράφω το χρώμα της.
Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων
Α: και οι δύο μπάλες να είναι ίδιου χρώματος
Β: Η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη.
Γ: οι δύο μπάλες να μην είναι ίδιου χρώματος

(4) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4\}$.
$\Omega = \{(x, y) / x \in A$ και $y \in B\}$.
α) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω με αναγραφή των στοιχείων του.
β) Επιλέγω ένα στοιχείο του Ω τυχαία.

Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων
i) A: Η διαφορά $y-x=1$.
ii) B: είναι $x<y$.

(5) $\Omega = \{\omega \in Z \; / \; -5 \leq \omega \leq 5\}$.
$A = \{\omega \in \Omega \; / \; \omega > -1$
$B = \{\omega \in \Omega \; / -2 < \omega \leq 3 \}$.
Αν επιλέξω τυχαία ένα στοιχείο του Ω να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων
α) Να ανήκει στο A
β). Να ανήκει στο B.
γ) Να ανήκει στο A ή στο B.
δ) Να ανήκει και στο A και στο B.
ε) Να ανήκει στο A και όχι στο B.
στ) Να ανήκει μόνο στο A ή μόνο στο B.
ζ) Να ανήκει το πολύ σε ένα από τα A, B.

ΜΑΘΗΜΑ 5 | 2 ωρες

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΣΤΟΧΟΣ | Να βρισκουν οι μαθητές πιθανότητες μέσω κανόνων

(1) Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ισχύει $\boxed{P(A\cup B) = P(A)+P(B)}$

πχ.

Αν $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$ τότε $A\cup B = \{\quad\}$ Παρατηρώ ότι η ένωση εχει .. στοιχεία δηλαδή (.. + ..)

άρα $N(A\cup B) = N(A) + \ldots$

Άρα αν $N(A)=\kappa$, $N(B)=\lambda$ τότε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda$

δηλαδή $N(A\cup B) = N(A)+N(B)$

άρα $P(A\cup B) = \dfrac{N(\quad)}{N(\quad)} = \underline{\qquad} = \underline{\quad} + \underline{\quad} = P(A)+P(B)$

(2) Εστω $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{3,4,5\}$ δύο ενδεχόμενα

$N(A)=4$, $N(B)=3$ τότε $A\cup B = \{\quad\}$

$N(A\cup B)=$ άρα $N(A\cup B) = 4+3-\quad = N(A)+N(B)-\ldots$

Άρα

$P(A\cup B) = \dfrac{N(\quad)}{N(\Omega)} = \underline{\qquad} = \underline{\quad} + \underline{\quad} - \underline{\quad}$

$=$

άρα

$\boxed{P(A\cup B) = \ldots + \ldots - }$

(3) $\ldots$, $\boxed{P(A') = 1-P(A)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι $A\cup A' = \Omega$ και τα A, A' είναι .....

άρα $P(A\cup A') = \ldots + \ldots$

$P(\Omega) = \ldots + \ldots$

$1 =$

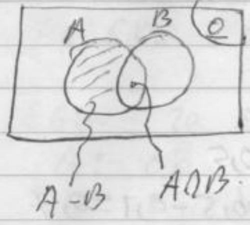
άρα $P(A') = 1-P(A)$.

(4) Αν $A\subseteq B$ τότε $N(A)\ \ldots\ N(B)$ άρα $\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}\ \ldots\ \dfrac{N(B)}{N(\Omega)}$

άρα $\boxed{P(A)\ \ldots\ P(B)}$

(5) $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

Απόδειξη



Από το σχήμα παρατηρώ ότι

τα $A-B$, $A\cap B$ είναι . . . . .

και $(A-B)\cup(A\cap B) = . .$

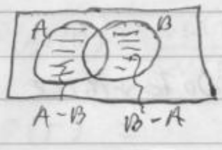
άρα $P[(A-B)\cup(A\cap B)] = . .$

$. . + . . = . .$

άρα $\boxed{P(A-B) = P(A) = P(A\cap B)}$

(6) $P[(A-B)\cup(B-A)] \underset{\text{ασυμβίβαστα}}{\overset{A-B,\ B-A}{=}} . . . + . . .$

$= . . . . . . = \Big[\begin{matrix}= \\ =\end{matrix}$



(7) Αν $A \subseteq B$ τότε

$A\cup B =$

$A\cap B =$

1) $P(A) \leq P(B)$
2) $P(A\cup B) =$
3) $P(A\cap B) =$
4) $P(.\ A-B) =$
5) $P(B-A) =$

(8) i) $A \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A) \,..\, P(A\cup B)$

ii) $B \subseteq A\cup B \Rightarrow P(B) \,..\, P(A\cup B)$

iii) $A\cap B \subseteq A \Rightarrow P(A\cap B) \,..\, P(A)$

iv) $A\cap B \subseteq B \Rightarrow P(A\cap B) \,..\, P(B)$

v) $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B \Rightarrow . . . . . .$

(1) Αν $P(A)=0,3$, $P(B)=0,5$ και $P(A\cap B)=0,1$
να υπολογίσετε τις πιθανότητες
α) $P(A\cup B)$ β) $P(A-B)$ γ) $P(B-A)$

ΛΥΣΗ

α) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow$
$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,3+0,5-0,1=0,7$

β) $P(A-B)=$

γ) $P(B-A)=$

(2) Αν $P(A\cup B)=0,7$, $P(A-B)=0,3$, $P(B)=;$

ΛΥΣΗ

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B)=\underline{P(A)-P(A\cap B)}+P(B)$
$\Leftrightarrow P(A\cup B)=\ldots\ldots+P(B) \Leftrightarrow P(B)=\ldots\ldots$

(3) Αν $P(A\cup B)=0,9$ $P(A\cap B)'=0,8$ να υπολογίσετε
α) $P(A\cap B)$ β) $P(A-B)\cup(B-A)$

ΛΥΣΗ

α) $P(A\cap B)'=1-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=\ldots$
$P(A\cap B)=$

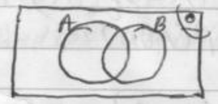
β) $P[(A-B)\cup(B-A)] \overset{A-B,\ B-A}{\underset{\text{ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤ.}}{=}} \ldots + \ldots =$
$= \ldots \ldots =$

(4) Από τους 80 μαθητές ενός λυκείου οι 60 γνωρίζουν Αγγλικά οι 50 δεν γνωρίζουν Γαλλικά και 20 μαθητές γνωρίζουν και τις δύο γλώσσες. Επιλέγω τυχαία ένα μαθητή να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

Γ: ο μαθητής γνωρίζει μια τουλάχιστον γλώσσα.
Δ: ο μαθητής γνωρίζει το πολύ μια γλώσσα
Ε: ο μαθητής γνωρίζει ακριβώς μια γλώσσα

Προσοχή: Σε τέτοια προβλήματα ορίζω πάντα δύο ενδεχόμενα A, B και με τη βοήθεια αυτών βρίσκω όλα τα υπόλοιπα.

ΛΥΣΗ



Έστω τα ενδεχόμενα.

A: ο μαθητής γνωρίζει Αγγλικά

B: ο μαθητής γνωρίζει Γαλλικά

Τότε $N(\Omega) = 80$, $N(A) = 60$, $N(B') = 50$, $N(A \cap B) = 20$

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

- $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{80} = \frac{6}{8}$

$P(B') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$ άρα

- $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$
- $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{20}{80} = \frac{2}{8}$

ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ

α) $P(\Gamma) = P(A \cup B)$

β) $P(\Delta) = P(\quad)$

γ) $P(E) = P[\quad]$

ΑΡΑ

α) $P(\Gamma) =$

β) $P(\Delta) =$

γ) $P(E) =$

5 (ΠΡΟΣΟΧΗ όταν έχω δύο ομάδες ατόμων και δύο επιλογές για κάθε ομάδα τότε κάνω πίνακα.)

Σε μια τάξη με 12 κορίτσια και 8 αγόρια από τα κορίτσια τα 5 μαθαίνουν μουσική και από τα αγόρια τα 2.
Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρεθούν οι πιθανότητες
α) A: Να είναι κορίτσι και να μαθαίνει μουσική
β) B: Να μην μαθαίνει μουσική

	ΜΑΘΑΙΝΕΙ	ΔΕΝ ΜΑΘΑΙΝΕΙ
ΑΓΟΡΙΑ 8		
ΚΟΡΙΤΣΙΑ 12		
ΣΥΝΟΛΟ 20		

ΛΥΣΗ

α) $N(\Omega) = 20$, $N(A) =$ $P(A) = —$

β) $N(B) =$ $P(B) = —$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{5}{8}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ Να υπολογίσετε
α) $P(A\cup B)$ β) $P(A-B)$ γ) $P(B-A)$ δ) $P(A\cap B)'$

2) $P(A-B)=0,3$ $P(B')=0,6$, $P(A\cap B)=0,1$
Να υπολογίσετε
α) $P(A)$ β) $P(B)$ γ) $P(A\cup B)$ δ) $P[(A-B)\cup(B-A)]$

3) $P(A\cup B)=0,7$, $P(A\cap B)=0,1$, $P(A)=3P(B)$
Να υπολογίσετε α) $P(A)$ β) $P(B)$ γ) $P[(A-B)']$

4) Μια μέρα στο Α1 τμήμα ενός Λυκείου το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία το $\frac{1}{3}$ έχει διαβάσει και τα δύο μαθήματα
Ο καθηγητής επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για εξέταση
να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων·
α) Να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο
β) Να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δύο.
γ) Αν επιπλέον οι μισοί μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής
i) Να έχει διαβάσει Γεωμετρία.
ii) Να έχει διαβάσει Άλγεβρα. (τράπεζα θεμάτων)

5) Σε ένα τμήμα Α΄ Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν Αγγλικά κάποιοι Γαλλικά. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8
Η πιθανότητα να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να παρακολουθεί Γαλλικά και η πιθανότητα να παρακολουθεί τουλάχιστον μια γλώσσα είναι 0,9. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρεθούν οι πιθανότητες

α) Να παρακολουθεί ταυτόχρονα και τις δύο γλώσσες
β) Να παρακολουθεί μόνο μία από τις δύο γλώσσες
γ) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος (τράπεζα θεμάτων)

6) Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα. Για να βαθμολογηθούν με άριστα οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα. Για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστο από τα δύο. Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν 60 μαθητές σωστά και στο δεύτερο θέμα απάντησαν 50 μαθητές και στα δύο απάντησαν 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα)
β) Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων
Δ: ο μαθητής απάντησε σωστά μόνο στο Β θέμα
Ε: ο μαθητής να βαθμολογηθεί με άριστα
Ζ: ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.
Η: ο μαθητής πέρασε την εξέταση (τράπεζα θεμάτων)

7) Σε μία ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες, 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με τη χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο
i) Να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι
ii) Να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι.
β) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου
Α: Το άτομο να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι
(τράπεζα θεμάτων)

(8) Σε ένα τμήμα Α Λυκείου και οι 25 μαθητές. Παρακολουθούν μια τουλαχιστον γλώσσα· Αγγλικά ή Γαλλικά 20 παρακολουθούν Αγγλικά και 10 παρακολουθούν Γαλλικά

α) Πόσοι μαθητές παρακολουθούν ταυτόχρονα και τις δύο γλώσσες;

β) Επιλέγω τυχαία ένα μαθητή. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

Γ: ο μαθητής παρακολουθεί και τις δύο γλώσες

Β: ο μαθητής παρακολουθεί μονο Αγγλικά και οχι γαλλικά

Δ: ο μαθητής παρακολουθεί ακριβώς μια από τις δύο γλώσσες

Ε: ο μαθητής παρακολουθεί το πολύ μια από τις δύο

(9) Απο τους 25 μαθητές μιας τάξης 15 είναι κορίτσια και από τα 15 κορίτσια τα 10 συμμετέχουν σε ένα πρόγραμμα για τη διατροφή

Επιλέγω τυχαία ένα άτομο από τα 25 της τάξης

α) Να κάνετε διάγραμμα venn ορίζοντας τα κατάλληλα συνολα

β) Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

Γ: το άτομο είναι κορίτσι και δέν συμμετέχει στο πρόγραμμα.

Δ: Το άτομο είναι κορίτσι ή συμμετέχει στο προγραμμα.

Ε: Το άτομο δέν είναι κορίτσι και δέν συμμετέχει στο πρόγραμμα

ΜΑΘΗΜΑ 6.

ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.

ΣΤΟΧΟΣ α) Να ξεχωρίσουν οι μαθητές την έννοια της συνεπαγωγής και ισοδυναμίας
β) Να ξεχωρίσουν οι μαθητές την έννοια του (ή) και του (και.)

Α. Η ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ $\Longrightarrow$ ① Χρησιμοποιείται όταν από μια αληθή πρόταση p συνεπάγεται μια αληθής πρόταση q.

ι) αν ο Πέτρος είναι μαθητής Α' Λυκείου $\Longrightarrow$ (τότε) έχει ηλικία μεγαλύτερη από 14 έτη.

ιι) αν $\alpha = 3 \Longrightarrow \alpha^2 = 9$.

ιιι) αν $\alpha = -3 \Longrightarrow \alpha^2 = ..$

ιν) αν $\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha^2 = ..$

ν) αν $\alpha > 5 \Longrightarrow \alpha^3 .. 125$

νι) αν $...\Longrightarrow \alpha^2 < 4$

② Επίσης Χρησιμοποιείται όταν από δύο ή περισσότερες αληθείς προτάσεις συνεπάγεται μια αληθής πρόταση.

ι) αν $\alpha = 4$ και $\beta = 6 \Longrightarrow \alpha + \beta = 10$

ιι) αν $\left.\begin{matrix}\alpha < 3\\ \beta < 5\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha + \beta < ..$

ιιι) αν ο Πέτρος έχει ίδια ηλικία με τον Κώστα. και ο Κώστας έχει ίδια ηλικία με τον Νίκο. (Τότε) $\Longrightarrow$ ο Πέτρος έχει . . . . . .

Β. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ $\Longleftrightarrow$ Χρησιμοποιείται όταν μια αληθής πρόταση p συνεπάγεται μια αληθή πρόταση q και αντίστροφα όταν από την αληθή πρόταση q συνεπάγεται η αληθής πρόταση p

πχ) αν $\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ και αν $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Longrightarrow \alpha = \beta$ } αφού ισχύουν και οι δύο συνεπαγωγές

τότε γράφω $\boxed{\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma}$

πχ2.
$\boxed{\text{Προσοχή}}$ στη περίπτωση που έχω:

$\alpha = 3 \Longrightarrow \alpha^2 = 9$ δεν ισχύει η ισοδυναμία.

γιατί αν $\alpha^2 = 9 \Longrightarrow \alpha = ..$ ή $\alpha = ...$

Άρα ισχύει η ισοδυναμία ως εξής

$\alpha^2 = 9 \Longleftrightarrow \alpha = ..$ ή $\alpha = ..$

πχ3 $\alpha = 2 \Longleftrightarrow \alpha^3 = ..$

πχ4 $\alpha^4 = 16 \Longleftrightarrow ....$

πχ5 $\alpha^2 = \alpha \Longleftrightarrow ....$

α) αν $\rho = 4$ .. $\rho^3 = 64$

β) αν $\alpha = \beta$ .. $\alpha^2 = \beta^2$

γ) αν $\alpha = \beta$ .. $\alpha^3 = \beta^3$

δ) αν $\alpha^2 = 25$ .. $\alpha = 5$ ή $\alpha = -5$

ε) αν $\alpha = 4$ και $\beta = 3$ .. $\alpha\beta = 12$

$\boxed{\text{Γ. ο σύνδεσμος (ή)}}$ $\boxed{\alpha \cdot \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0}$

$\alpha \cdot \beta = 0$ σημαίνει $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή και τα δύο ταυτόχρονα είναι 0 και βάζουμε ισοδυναμία αφού ισχύει και το αντίστροφο

πχ1 $\alpha \cdot (\beta - 4) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta =$

πχ2 $(\alpha - 4) \cdot (\beta + 6) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = ..$ ή $\beta = ..$

πχ3 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 0 \Longleftrightarrow$

πχ4 $(x-1)(y-4) \cdot (\alpha - 5) = 0 \Longleftrightarrow$

$\boxed{\text{Δ. ο ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ (και)}}$ $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

πχ1 $\alpha \cdot (\beta - 4) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq$

πχ2 $(x-3)(y-4) \neq 0 \Longleftrightarrow ...$

πχ3 $(x-2)(y-4) \cdot (\alpha + 5) \neq 0 \Longleftrightarrow ..$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

1) $(x-5)\cdot(x-3)=0$ . . $x=5$ . . $x=3$
2) $(x+3)\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow$ . . .
3) $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow$ . . .
4) $x^2+y^2\neq 0 \Leftrightarrow$ . . .
5) $(x-3)^2+(y-4)^2=0 \Leftrightarrow$ . . .
6) $(x-2)^2+(y-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow$ . . .

② Να συμπληρώσετε τις προτάσεις

1) $(x+3)\cdot(x-5)\cdot(2x-8)=0 \Leftrightarrow$ . . .
2) $x^2+y^2+\omega^2=0 \Leftrightarrow$ . . .
3) $(x-3)^2+(y-2)^2+(\omega-4)^2=0 \Leftrightarrow$ . . .
4) $(x-2)^2+(x^2-4)=0 \Leftrightarrow$ . . .
5) $(x^2-9)^2+(x^2-3x)^2=0 \Leftrightarrow$ . . .

③ Να συμπληρώσετε τις προτάσεις

1) $\alpha^2=16 \Leftrightarrow$ . . .
2) $\alpha^2=5\alpha \Leftrightarrow$ . . .
3) $\alpha=0$ και $\beta=0 \Leftrightarrow$ . . .
4) $\alpha=0$ ή $\beta=0 \Leftrightarrow$ . . .

⑤ Να χαρακτηρίσετε Σ ή Λ.
Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τότε.

1) $\alpha=9 \Rightarrow \alpha^2=81$
2) $\alpha=-9 \Rightarrow \alpha^2=81$
3) $\alpha=9 \Leftrightarrow \alpha^2=81$
4) $\alpha=-9 \Leftrightarrow \alpha^2=81$
5) $\alpha^2=81 \Leftrightarrow \alpha=9$ ή $\alpha=-9$
6) $\alpha<2 \Rightarrow \alpha^2<4$
7) $\alpha^2<4 \Rightarrow \alpha<2$
8) $\alpha<2$ και $\beta<3 \Rightarrow \alpha\cdot\beta<6$

ΜΑΘΗΜΑ 7

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ R ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΣΤΟΧΟΣ: Να θυμηθούν οι μαθητές τις ιδιότητες των πράξεων από το ΓΥΜΝΑΣΙΟ.

- Το Σύνολο των φυσικών αριθμών $N = \{ \quad \}$
- Το Σύνολο των ακεραίων αριθμών $Z = \{ \quad \}$
- Το Σύνολο των ρητών αριθμών $Q = \{x / x = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha, \beta \in Z, \beta \neq 0\}$
- Το Σύνολο των άρρητων αριθμών: όσοι δεν είναι ρητοί
  πχ $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, 3,7896\ldots$
- Το Σύνολο των Πραγματικών αριθμών R: όλοι οι αριθμοί

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
1) $\alpha + \beta = \ldots$	1) $\alpha \cdot \beta = \ldots$
2) $\alpha + (\beta + \gamma) = \ldots$	2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \ldots$
3) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \ldots$	3) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \ldots$
4) $\alpha + (-\alpha) =$	4) $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} =$

- Επιμεριστική ιδιότητα $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \ldots$
- Διαφορά $\alpha - \beta = \alpha + \ldots$
- Πηλίκο $\alpha : \beta = \alpha \cdot \ldots$
- Άρτιος λέγεται κάθε ακέραιος που είναι πολλαπλάσιο του .. και συμβολίζεται $\alpha = 2\nu$ (ζυγός) όπου ν ακέραιος
- Περιττός λέγεται κάθε μη άρτιος ακέραιος και συμβολίζεται $\alpha = 2\nu + 1$ (μονός)

πχ άρτιοι $2, 4, \ldots$

πχ περιττοί $1, 3, \ldots$

- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

1) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$
2) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ με $\gamma \neq 0$
3) $\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma = \ldots + \ldots$
4) $\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \ldots$

$\boxed{N^*, Z^*, Q^*, R^*}$ το αντίστοιχο σύνολο χωρίς το μηδέν.

- $(-1)\cdot\alpha = \ldots$
- $(-\alpha)\cdot\beta = \ldots$
- $(-\alpha)\cdot(-\beta) = \ldots$
- $-(\alpha+\beta) = \ldots$
- $-(\alpha-\beta-\gamma) = \ldots$
- $(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma) = \ldots$
- $(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)\cdot(-\delta) = \ldots$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ.

- ΟΡΙΣΜΟΙ $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$, $\alpha^0 = \ldots$, $\alpha^{-\nu} = \ldots$ με $\alpha \neq 0$
- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 1) $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu = \ldots$ 2) $\alpha^\mu/\alpha^\nu = \ldots$ 3) $(\alpha^\mu)^\nu = \ldots$
  4) $(\alpha\cdot\beta)^\nu = \ldots$ 5) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \text{—}$ 6) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \ldots$

- Αν $\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$.
- Αν $\alpha^\nu = \beta^\nu \xLeftrightarrow{\nu \cdot \text{περιττός}} \alpha = \beta$.
- Αν $\alpha^\nu = \beta^\nu \xLeftrightarrow{\nu \cdot \text{άρτιος}} \alpha = \ldots$ ή $\alpha = \ldots$

πχ1 αν $\alpha^4 = \beta^4 \Leftrightarrow \ldots$

πχ2 αν $\alpha^3 = \beta^3 \Leftrightarrow \ldots$

- Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

$2^3 =$	$(-2)^3 =$	$(-2)^0 =$	$(-2)^{-3} =$	$-2^{-3} =$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^3 =$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$
$2^4 =$	$(-2)^4 =$	$-2^0 =$	$(-2)^{-4} =$	$-2^{-4} =$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^4 =$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} =$

- ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

  $2^8\cdot 2^5 =$, $2^8\cdot 2^{-10} =$, $2^{-5} : 2^{-8} =$, $\left((-2)^2\right)^3 =$

  $4^{100}\cdot 0{,}25^{10} =$, $2^{101}\cdot 0{,}5^{100} =$

- ΝΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΤΕ ΤΙΣ ΙΣΟΤΗΤΕΣ

  $\alpha + 5 = \beta + 5 \Leftrightarrow \ldots$

  $5\cdot\alpha = 5\cdot\beta \Leftrightarrow \ldots$

  $\alpha^4 = 16 \Leftrightarrow \ldots$

- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ 2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ 4) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

- ο αριθμός $\alpha = 4\nu^2 + 2\nu = 2\cdot(\quad\quad) = 2K$ είναι άρτιος
- ο αριθμός $\alpha = 4\nu^2 + 2\nu + 3 = 4\nu^2 + 2\nu + 2 + 1 = 2(\ldots) + 1$
  όπου $\nu \in N^*$ $= 2K + 1$ είναι ...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) να γίνουν οι πράξεις

α) $\left(\frac{5}{7}\right)^{100}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{100}\cdot\left(-\frac{10}{5}\right)^{100}$

β) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{2014}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2014}$

γ) $\dfrac{(5^2)^{-6}\cdot 5^8}{(5^3)^{-5}\cdot 5^{10}}$ δ) $2^{2015}\cdot 0{,}5^{2014}$

2) να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων αν $\nu\in N^*$

$A=(-1)^{\nu}-(-1)^{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}+(-1)^{\nu+3}$

$B=(-1)^{3\nu}$

$\Gamma=(-1)^{4\nu}+(-1)^{2\nu}$

3) να απλοποιηθούν οι παραστάσεις αν $\nu\in N^*$

α) $(\alpha^2)^{6\nu+2}\cdot(\alpha^{-3})^{4\nu}$, $\alpha\neq 0$

β) $(\alpha^{\beta-1})^{2}\cdot(\alpha^{\beta-4})^{-2}$, $\alpha\neq 0$

4) να εξετάσετε αν είναι άρτιοι ή περιττοί οι αριθμοί

$\alpha=6\kappa^2+2\kappa+6$, $\kappa\in N$

$\beta=8\kappa^2+2\kappa+5$, $\kappa\in N$

5) αν $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{5}=\lambda$ και $\alpha+\beta+\gamma=60$ να υπολογίσετε τα α,β,γ

6) αν $\frac{x}{9}=\frac{4}{x}$ να βρεθεί ο αριθμός x

ΜΑΘΗΜΑ 8 ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΣΤΟΧΟΣ: να θυμηθούν οι μαθητές τις ταυτότητες

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα με μεταβλητές που ισχύει για κάθε τιμή των μεταβλητών της

Πχ1 $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$, $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=$ . . . . . .

Πχ2 $0\cdot x=0$

Πχ3 $(\alpha\cdot\beta)^2=\alpha^2\cdot\beta^2$

Πχ3 $(\alpha+\beta)^2=$ . . .

Πχ4 $(\alpha+\beta)^3=$ . . . .

Πχ5 $(\alpha-\beta)^2=$ . . .

Πχ6 $(\alpha-\beta)^3=$ . . . .

Πχ7 $(\alpha+\beta+\gamma)^2=$ . . . .

Πχ8 $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=$ . . .

Πχ9 $\alpha^3-\beta^3=$ . . . .

Πχ10 $\alpha^3+\beta^3=$ . . . .

- Να κάνετε τις πράξεις με δύο τρόπους (αναλυτικά ή με ταυτότητες)

$(x+2)^2=$ $(x+2)\cdot(x+2)=$ . . . . . = . . .

$= $ . . . .

$(x-5)^2=$

$(2x+4)^2=$

$(x+2)^3=$

- Να υπολογίσετε τα κάτωθι μεγέθη με βοήθεια ταυτοτήτων

$101^2-999^2=$

$103\cdot 97=$

$55^2-2\cdot 55\cdot 53+53^2=$

- Να γίνουν οι πράξεις

$A=(x+3)^2-(x-2)^2+2x(x-4)$

$B=x\cdot(x-1)^2-(x-2)^3$

$\Gamma=(3\alpha+2\beta)^2+(2\alpha-3\beta)^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους

α) $(3x+2y)^2$

β) $(2x-y)^2$

γ) $(2x+5)^3$

δ) $(2x-2)^3$

ε) $(x^2+2x+1)^2$

στ) $(x^2-2x-1)^2$

2) Να γίνουν οι πράξεις

$A=\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)$

$B=(5\alpha+3\beta)^2-(5\alpha-3\beta)^2$

$\Gamma=(5\alpha+2\beta)^2+(2\alpha-5\beta)^2$

$\Delta=\alpha\cdot(\alpha+5)^2-(\alpha-1)^2$

3) Να συμπληρώσετε τα κενά

$x^2-10x+25=(\;.\;\;.\;)^2$

$x^2+6x+\,..\,=(\;.\;+3)^2$

$4\alpha^2+\;..\;+9\beta^2=(\qquad)^2$

$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1=(\qquad)^3$

$\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=(\qquad)^3$

ΜΑΘΗΜΑ 9

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ.

ΣΤΟΧΟΣ: να μάθουν οι μαθητές τους τρόπους απόδειξης ισοτήτων της μορφής $A = B$

(A) ΓΙΑ ΝΑ ΔΕΙΞΩ ΜΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $A = B$ υπάρχουν οι εξής τρόποι.

1ος τρόπος| παίρνω το α' μέλος κάνω πράξεις και καταλήγω στο β

$A = \dots$ πράξεις $= B$.

2ος τρόπος| παίρνω το β' μέλος κάνω πράξεις και καταλήγω στο α

$B = \dots$ πράξεις $= A$

3ος τρόπος| $\left.\begin{array}{l} A = \dots \text{ πράξεις } = \Gamma \\ B = \dots \text{ πράξεις } = \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

4ος τρόπος| $A = B \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow$ πράξεις $\dots \Leftrightarrow 0 = 0$

που ισχύει άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική

(Πχ1) Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

• $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\dots) = \dots$

$= \dots$ (1ος τρόπος)

(Πχ2) Να δείξετε ότι $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

• $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \dots = \dots$ (2ος τρόπος)

(Πχ3) Να δείξετε ότι $(\alpha^2+\beta^2)\cdot(x^2+y^2) = (\alpha x+\beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$

εδώ επειδή έχω πράξεις και στα δύο μέλη επιλέγω τον 3ο τρόπο

3ος τρόπος:

Το α' μέλος γίνεται $(\alpha^2+\beta^2)\cdot(x^2+y^2) = \alpha^2x^2 + \dots$

το β' μέλος γίνεται $(\alpha x+\beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 = \dots$

$= \dots$

Παρατηρώ ότι τα δύο μέλη είναι ίσα άρα ισχύει η ισότητα

4ος τρόπος: να δείξετε $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta} = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ όπου $\alpha \neq -\beta$.

• $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta} = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3 - (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\dots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική

(Πχ4) Να δείξετε $(5\alpha+\beta)^2-(5\alpha-\beta)^2=20\alpha\beta$. (1ος)

• $(5\alpha+\beta)^2-(5\alpha-\beta)^2= . \ . \ . \ .$

(Πχ5) Να δείξετε $\alpha^5-1=(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$ (2ος)

• $(\alpha-1)\cdot(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)= . \ . \ .$

(Πχ6) Να δείξετε $(3\alpha+2\beta)^2-(2\alpha+3\beta)^2=5(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ (3ος)

•

•

(Πχ7) Να δείξετε ότι $P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)$ (4ος)

(Β) Για να δείξω ότι αν ισχύει μια πρόταση p τότε ισχύει και μια άλλη πρόταση q $(p\Rightarrow q)$ τότε ξεκινάμε από την υπόθεση πρόταση p και με λογικά διαδοχικά βήματα καταλήγω στην πρόταση q (ευθεία απόδειξη)

(Πχ1) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

Απόδειξη

αφού $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-\alpha-\beta$ άρα

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\alpha^3+\beta^3+(-\alpha-\beta)^3= . \ . \ . \ . \ . \ . =$

$= . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = . \ . \ . \ . =3\alpha\beta\gamma$.

(Πχ2) Αν ο αριθμός α είναι περιττός τότε να δείξετε ότι και ο αριθμός $\alpha^2+2\alpha$ είναι περιττός

Λύση

Έστω ο αριθμός α είναι περιττός τότε $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

τότε $\alpha^2+2\alpha=(2\kappa+1)^2+2(2\kappa+1)=4\kappa^2+4\kappa+1+4\kappa+2=$

$=4\kappa^2+8\kappa+2+1=2(2\kappa^2+4\kappa+1)+1=2\mu+1$ περιττός

(Πχ3) Αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε να δείξετε ότι κάθε γωνία του είναι 60 μοίρες

Λύση: Αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε οι γωνίες του είναι ισες $A = B = \Gamma = x^\circ$
όμως $A + B + \Gamma = \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\boxed{\Gamma}$ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΑΤΟΠΟ
Αν θέλω να δείξω $(p \Longrightarrow q)$
Τότε αν θεωρήσω ότι δέν ισχύει η πρόταση q
Τότε με λογικά συμπεράσματα καταλήγω σε συμπέρασμα.
που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει
καταλήγω δηλαδή σε __ΑΤΟΠΟ__. άρα η προταση q αληθεύει.

ΠΧ1 Αν $\alpha \neq \beta$ Να δείξετε ότι $\frac{3\alpha+5}{\alpha-1} \neq \frac{3\beta+5}{\beta-1}$, $(\alpha \neq 1, \beta \neq 1)$

ΛΥΣΗ

Εστω οτι δεν είναι $\frac{3\alpha+5}{\alpha-1} \neq \frac{3\beta+5}{\beta-1}$ τότε θα είναι ίσα δηλαδή θα ισχύει.

$\frac{3\alpha+5}{\alpha-1} = \frac{3\beta+5}{\beta-1} \Leftrightarrow (3\alpha+5)(\beta-1) = (3\beta+5)(\alpha-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{3\alpha\beta} - 3\alpha + 5\beta - \cancel{5} = \cancel{3\alpha\beta} - 3\beta + 5\alpha - \cancel{5} \Leftrightarrow 5\beta + 3\beta = 5\alpha + 3\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\beta = 8\alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha$ άτοπο αφού γνωρίζω ότι $\alpha \neq \beta$

άρα $\frac{3\alpha+5}{\alpha-1} \neq \frac{3\beta+5}{\beta-1}$

ΠΧ2 Αν ο α^2 είνα άρτιος τότε και ο α είναι άρτιος

ΛΥΣΗ

Εστω ο α δέν είναι άρτιος τοτε θα είναι . . . . .
δηλαδή $\alpha = \ldots$ τότε θα ισχύει
$\alpha^2 = \ldots = \ldots = \ldots = \ldots$
άτοπο άρα ο α είναι . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Να δείξετε $(3\alpha+5\beta)^2-(5\alpha-3\beta)^2=16(\beta^2-\alpha^2)$

② Να δείξετε $\alpha^4-1=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$

③ Να δείξετε $(\alpha^2+4)(x^2+9)=(\alpha x+6)^2+(3\alpha-2x)^2$

④ Να δείξετε $\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$ (όπου $x\neq 1$)

⑤ Να δείξετε ότι $P(A\cup B)-P(A-B)=P(B-A)+P(A\cap B)$

⑥ Αν οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3, 4 δηλαδή $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{\Gamma}{4}$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου

⑦ Τρία αδέρφια μοιράστηκαν 1000 € ανάλογα με τη βαθμολογία που πήραν σε ένα διαγωνισμό ο πρώτος πήρε 18 ο δεύτερος πήρε 12 και ο τρίτος 10 να βρήτε πόσα χρήματα θα πάρει ο καθένας

⑧ Αν $\alpha\neq\beta$ να δείξετε ότι και $\dfrac{5\alpha+1}{\alpha-3}\neq\dfrac{5\beta+1}{\beta-3}$ όπου $\alpha\neq 3, \beta\neq 3$.

⑨ Αν ο α^2 είναι περιττός τότε να δείξετε ότι και ο α είναι περιττός

⑩ Αν $\alpha^5+\alpha^3\neq\beta^5+\beta^3$ τότε $\alpha\neq\beta$ (όπου $\alpha,\beta\neq 0$)

ΜΑΘΗΜΑ 10

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΣΤΟΧΟΣ: να θυμηθούν οι μαθητές από το Γυμνάσιο τους τρόπους παραγοντοποίησης

1) Κοινός παράγοντας.

- $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha \cdot (\qquad)$.
- $\alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha\delta = \alpha \cdot (\qquad)$.
- $x^3 - 4x^2 + 5x = x \cdot (\qquad)$
- $\alpha(x-1) + \beta(x-1) = (x-1) \cdot (\qquad)$.

2) ομαδοποίηση

- $\alpha\beta + \alpha\gamma + \delta\beta + \delta\gamma = \alpha \cdot (\qquad) + \delta(\qquad) =$
- $\alpha x - \alpha y + 4x - 4y =$
- $\alpha x - \alpha y - 5x + 5y =$

3) Διαφορά Τετραγώνων.

- $\alpha^2 - \beta^2 = (\qquad) \cdot (\qquad)$
- $x^2 - 4 =$
- $4x^2 - 9y^2 =$
- $x^4 - 16 =$
- $(4x-3)^2 - 9x^2 =$

4) Διαφορά κύβων

$\alpha^3 - \beta^3 = (\qquad)(\qquad)$.

$x^3 - 8 =$

$\alpha^3 - 27 =$

5) Αθροισμα κύβων

$\alpha^3 + \beta^3 = (\qquad)(\qquad)$.

$x^3 + 1 =$

$\alpha^3 + 27 =$

6) Τέλειο Τετράγωνο.

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\qquad)^2$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\qquad)^2$

$x^2 - 6x + 9 = (\qquad)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = (\qquad)^2$

7| Ανάλυση Τριωνύμου

- $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$
- $x^2+5x+6 = x^2+(3+2)x+3\cdot 2 = (x+3)(x+2)$
- $x^2-5x+6 = x^2+(-3-2)x+(-3)\cdot(-2) = (x-3)(x-2)$
- $x^2+7x+12 =$
- $x^2-7x+12 =$
- $x^2+x-12 =$
- $x^2-x-12 =$

8| Συνδιασμός Περιπτώσεων κοινού παράγοντα και άλλο

- $x^3-25x =$
- $x^4-x =$
- $x^5+x^2 =$
- $x^3+4x^2+4x =$
- $x^3-3x^2+2x =$

9| Συνδιαστικές

- $\alpha x^2+\beta x^2-4\alpha-4\beta =$
- $x^3-3x^2-4x+12 =$
- $x^3-5x^2+5x-1 =$
- $\alpha^2x^2-\beta^2x^2-9\alpha^2+9\beta^2 =$
- $(5x+3y)^2-(2x+y)^2 =$
- $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4x^2 =$

10| ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

- $\dfrac{x^2-2x}{x^2-4} = \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x}{x-2}$ (με $x\neq 2, x\neq -2$)
- $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} =$ ______ $=$ ______ (με $x\neq\ , x\neq\ $)
- $\dfrac{x^3-8}{x^2-4} =$
- $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3} =$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Α. ΝΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1) $5\alpha^2 - 5\beta^2$ / $5\alpha^2\beta - 10\alpha\beta^2$ / $x^5 - 25x^3$

2) $x^3 - 27$ / $x^3 + 8$ / $x^3 - 125$

3) $x^2 - 10x + 25$ / $x^2 + 14x + 49$ / $4x^2 - 4x + 1$

4) $x^2 - 8x + 15$ / $x^2 + 8x + 15$ / $x^2 - 2x - 15$

5) $x^3 - 10x^2 + 25x$ / $x^3 - 7x^2 + 12x$ / $x^4 - 8x$.

6) $\alpha x^2 - \beta x^2 - 9\alpha + 9\beta$ / $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$

7) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ / $x^3 - 5x^2 + 5x - 8$.

8) $(5x+3)^2 - (2x+1)^2$ / $9(x-3)^2 - 4(3x-1)^2$

9) $x^2 - 6x + 9 - 4y^2$ / $9x^2 - y^2 - 4y - 4$

10) $\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2$ / $\alpha^2 + 10\alpha\beta + 24\beta^2$

Β. ΝΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

1) $\dfrac{\alpha x^2 - \alpha y^2}{\alpha x + \alpha y}$ / $\dfrac{x^3 - 9x}{x^2 + 3x}$ / $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x}$

2) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ / $\dfrac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}$

3) $\dfrac{x^2 - 4}{x - 3} \cdot \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x}$ / $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{x - 2} : \dfrac{\alpha + \beta}{x^2 - 4}$

4) $\dfrac{\alpha^3 + 1}{\alpha^2 - 1} : \dfrac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha - 1}$

5) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} + 2\right) : \left(\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

6) $\dfrac{3}{2\alpha + 2} - \dfrac{2}{3\alpha - 3} + \dfrac{5\alpha + 3}{6\alpha^2 - 6}$

ΜΑΘΗΜΑ 11 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ (2 ωρες)

Στοχος/ Να μπορούν οι μαθητές να συγκρίνουν δύο παραστάσεις, να κατασκευάζουν ανισότητες, να δείχνουν ανισότητες

Παρατηρώ $10>8 \Leftrightarrow 10-8=2>0$

$5<8 \Leftrightarrow 5-8=-3<0$

Άρα αν $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta\ ..\ 0$

αν $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta\ ..\ 0$

αν $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta\ ..\ 0$

αν $\alpha>2 \Leftrightarrow\ .\ .\ .$

αν $\alpha<2 \Leftrightarrow\ .\ .\ .$

Για να συγκρίνω δύο αριθμούς A, B παίρνω την διαφορά τους $A-B$ και

αν $A-B>0 \Leftrightarrow A\ ..\ B$

αν $A-B<0 \Leftrightarrow A\ ..\ B$

αν $A-B=0 \Leftrightarrow A\ \ B$

Πχ1 Να συγκριθούν οι παραστάσεις

$A=2\alpha^2+2\beta^2$, $B=(\alpha+\beta)^2$

Είναι $A-B=(2\alpha^2+2\beta^2)-(\alpha+\beta)^2=\ .\ .\ .\ .\ .$

$=\ .\ .\ .\ .\ .\ =(\alpha-\beta)^2\ ..\ 0$ άρα $A\ ..\ B$

Πχ2 Αν $2<\alpha<\beta<5$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $A=(\alpha-2)(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-5)\cdot(\beta-5)$

- αφού $\alpha>2 \Leftrightarrow \alpha-2>0$
  αφού $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta\ ..\ 0$
  αφού $\alpha<5 \Leftrightarrow \alpha-5\ ..\ 0$
  αφού $\beta<5 \Leftrightarrow \beta-5\ ..\ 0$

άρα $A=(+)\cdot(-)\cdot(-)(-)=-$

άρα $A<0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

1) $10<100 \Leftrightarrow 10+5\ ..\ 100+5$ άρα $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma\ ..\ \beta+\gamma$
2) $10<100 \Leftrightarrow 10\cdot5<100\cdot5$ άρα αν $\alpha<\beta$ και $\gamma>0 \Rightarrow \alpha\gamma\ ..\ \beta\gamma$
3) $10<100 \Leftrightarrow 10\cdot(-5)\ ..\ 100\cdot(-5)$ άρα αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<0 \Rightarrow \alpha\gamma\ ..\ \beta\gamma$
4) $10<100 \Leftrightarrow \frac{10}{5}\ ..\ \frac{100}{5}$ άρα αν $\alpha<\beta$ και $\gamma>0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}\ ..\ \frac{\beta}{\gamma}$

5) $10<100 \Leftrightarrow \frac{10}{-2} \ldots \frac{100}{-2}$ άρα αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} \ldots \frac{\beta}{\gamma}$

6) $\left.\begin{array}{l}10<100\\ 5<8\end{array}\right\} \Rightarrow 10+5 \ldots 100+8$ άρα $\left.\begin{array}{l}\alpha<\beta\\ \gamma<\delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\gamma \ldots \beta+\delta$

7) Για θετικούς αριθμούς ισχύει $\left.\begin{array}{l}\alpha<\beta\\ \gamma<\delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\cdot\gamma < \beta\cdot\delta$

8) αν $\alpha<\beta$ (θετικοί αριθμοί) $\Leftrightarrow \alpha^{\nu} \ldots \beta^{\nu}$ όπου $\nu \in N^*$

$5<8 \Leftrightarrow 5^2<8^2$

9) αν $\alpha<\beta$ (αρνητικοί αριθμοί) $\Rightarrow \alpha^{\nu} \ldots \beta^{\nu}$ αν ν άρτιος θετικός

$\Rightarrow \alpha^{\nu} \ldots \beta^{\nu}$ αν ν περιττός θετικ

$(-5)<(-3) \Rightarrow (-5)^2 \ldots (-3)^2$

$(-5)<(-3) \Rightarrow (-5)^3 \ldots (-3)^3$

10) $\left.\begin{array}{l}5<10 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{10}\\ -10<-5 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \ldots -\frac{1}{10}\end{array}\right\}$ αν $\alpha<\beta$ και ομόσημοι $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \ldots \frac{1}{\beta}$

Πχ1 Αν $1<x<2$ και $2<y<3$ να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=3x-5y+6$.

- $1<x<2 \Leftrightarrow 3\cdot 1<3\cdot x<3\cdot 2 \Leftrightarrow 3<3x<6$ (1)
- $2<y<3 \Leftrightarrow (-5)\cdot 2 \ldots -5\cdot y \ldots -5\cdot 3 \Leftrightarrow -10 \ldots -5y \ldots -15 \Leftrightarrow$

$-15<-5y<-10$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow 3+(-15)<3x-5y<6+(-10) \Leftrightarrow -12<3x-5y<-4$

$\Leftrightarrow -12+6 \ldots 3x-5y+6 \ldots -4+6 \Leftrightarrow -8<3x-5y+6<2$

άρα $-8<A<2$

Πχ2 Αν $2<x<4$ να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=x^2+\frac{1}{x}-6$.

- $2<x<4 \Leftrightarrow 2^2 \ldots x^2 \ldots 4^2 \Leftrightarrow 4 \ldots x^2 < \ldots$ (1)
- $2<x<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{x} \ldots \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{x} \ldots \frac{1}{2}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow 2+\frac{1}{4} \ldots x^2+\frac{1}{x} \ldots 4+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \ldots x^2+\frac{1}{x} \ldots \frac{9}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{9}{4}+(-6) \ldots x^2+\frac{1}{x}+(-6) \ldots \frac{9}{2}+(-6) \Leftrightarrow -\frac{15}{4} \ldots A \ldots \frac{-3}{2}$

Για να δείξω $A > B$ τότε με ισοδυναμίες

$A > B \Leftrightarrow A - B > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Gamma > 0$ καταλήγω σε μία ανισότητα η οποία ισχύει άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική

Πχ1 Να δείξετε $2\alpha^2+2\beta^2-4\alpha\beta \geq (\alpha+\beta)^2$

Απόδειξη

$2\alpha^2+2\beta^2-4\alpha\beta \geq (\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2-4\alpha\beta-(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2+2\beta^2-4\alpha\beta-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική

Πχ2 Να δείξετε $\alpha^2+\beta^2 \geq 2(\alpha+\beta-1)$

Απόδειξη

$\alpha^2+\beta^2 \geq 2(\alpha+\beta-1) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta-1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\ldots\ldots \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-2\beta+1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\ldots\ldots + \ldots\ldots \geq 0$

Πχ3 Αν $x \geq -2$ να δείξετε $x^3 \geq 4x+8-2x^2$

αφού $x \geq -2 \Leftrightarrow x-(-2) \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \geq 0$.

είναι $x^3 \geq 4x+8-2x^2 \Leftrightarrow x^3+2x^2-4x-8 \geq 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x+2)-4(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow (\quad)\cdot(\quad) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\ldots\ldots \geq 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \geq 0$ ισχύει

Πχ4 Να δείξετε $x^2+4x+5 > 0$ και $x^2+6x+10 > 0$

είναι $x^2+4x+5 > 0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+1 > 0 \Leftrightarrow (x+2)^2+1 > 0$ ισχύει

είναι $x^2+6x+10 > 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots$

Πχ5 Να δείξετε $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \geq 0$ και $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2 \geq 0$

Είναι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+(\alpha+\beta)^2+\beta^2 \geq 0$ ισχύει

Είναι $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ 1) $x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3,+\infty)$ 2) $x > 3 \Leftrightarrow x \in (3,+\infty)$

3) $x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$ 4) $x < 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3)$

5) $3 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [3,4]$ 6) $3 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (3,4)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Αν $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$ να δείξετε $3\alpha+\frac{\gamma}{5}<3\beta+\frac{\delta}{5}$

2) Αν $0<x<2$ να δείξετε $3<5x+3<12$

3) Αν $2<x<3$ και $5<y<10$ να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=3x+2y-10$ και $B=2x-4y+4$

4) Αν $2<x<3$ να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=x^2+5x+2$, $B=x^3+\frac{1}{x^3}$

5) Αν $2<\alpha<\beta<\gamma<5$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $A=(\alpha-2)\cdot(\gamma-\beta)\cdot(\alpha-\gamma)\cdot(5-\alpha)\cdot(\alpha+\gamma)$

6) Να δείξεις $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$

7) Να δείξετε $(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta\geq-8\beta^2$

9) Να δείξετε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$ (υποδ: πολλαπλ. με 2)

10) Να δείξετε $\alpha^2+\beta^2+1\geq2\alpha$.

11) Να δείξετε $x^2+10x+30>0$

12) Για κάθε $x>0$ να δείξετε $x+\frac{1}{x}\geq2$

13) Αν $x>1$ να δείξετε $x^3+x^2>x+1$

14 Να γράψετε με διαστήματα τις ανισότητες
α) $x<5$ β) $x\leq5$ γ) $x>5$ δ) $x\geq5$

15) Να γράψετε με διαστήματα τις ανισότητες
α) $5<x<6$ β) $5\leq x\leq6$ γ) $5<x\leq6$ δ) $5\leq x<6$.

16) Να γράψετε με ανισότητες τα διαστήματα
α) $x\in(-\infty,5)$ δ) $x\in(5,+\infty)$ ζ) $x\in[3,5)$
β) $x\in(-\infty,5]$ ε) $x\in[3,5]$ η) $x\in(3,5]$
γ) $x\in[5,+\infty)$ στ) $x\in(3,5)$

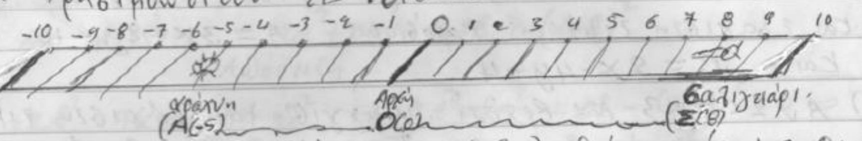
ΜΑΘΗΜΑ 12

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ. (3 ώρες)

ΣΤΟΧΟΣ: α) Να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι απόλυτη τιμή είναι απόσταση

β) Να βγάλουν μια παράσταση από το απόλυτο

γ) Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες



• Το σαλιγκάρι απέχει από την αρχή (Ο) απόσταση ίση με 8 μονάδες. Το μήκος του ευθ. τμήματος ΟΣ λέγεται απόλυτη τιμή του αριθμού 8 και συμβολίζεται με $|8|$ άρα $(ΟΣ) = |8| = 8$.

ομοίως $|4| = \dots$, $|\sqrt{2}| = \dots$, $|\frac{3}{4}| = \dots$, και γενικά αν α ένας θετικός αριθμός τότε $|\alpha| = \alpha$.

• Η αράχνη απέχει από την αρχή (Ο) απόσταση ίση με 5 μονάδες. Το μήκος του ευθ. τμήματος ΟΑ λέγεται απόλυτη τιμή του αριθμού -5 και συμβολίζεται $|-5|$ άρα $(ΟΑ) = |-5| = -(-5) = 5$

ομοίως $|-4| = -(-4) = 4$, $|-\sqrt{2}| = \dots$, $|-\frac{3}{4}| =$

και γενικά αν α ένας αρνητικός αριθμός τότε $|\alpha| = -\alpha$, επίσης $|0| = 0$.

Επομένως ορίζουμε

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

και γεωμετρικά $|\alpha| = (ΟΑ)$ η απόσταση του σημείου $A(\alpha)$ από το Ο

Όποτε για να βρω την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ή μιας παράστασης (Π) πρέπει να ελέγχω αν είναι θετική ή αρνητική και

αν $Π \geq 0$ τότε $|Π| = Π$

αν $Π < 0$ τότε $|Π| = -Π$.

Πχ $|5-\sqrt{3}| = 5-\sqrt{3}$ αφού $5 > \sqrt{3}$ άρα $5-\sqrt{3} > 0$

$|\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$ αφού $\sqrt{5} < 3$ άρα $\sqrt{5}-3 < 0$

$|4-\sqrt{2}| = \dots$

$|\alpha^2+\beta^2| =$

$|-\alpha^4-4| =$

- αν $x > 3$ τότε $|x-3| =$ αφού $x-3 \ldots 0$
- αν $x < 3$ τότε $|x-3| =$ αφού $x-3 \ldots 0$
- αν $2 < x < 5$ τότε $|x-2| = \ldots$ και $|x-5| =$

- Να γράψετε την παράσταση $A = 5x + |x-4|$ χωρίς απόλυτη τιμή

Λύση.

Είναι $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$, $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$, $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$ άρα

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

οπότε.
i) αν $x \geq 4$ τότε $A = 5x + x - 4 = 6x - 4$
ii) αν $x < 4$ τότε $A = 5x - (x-4) = 5x - x + 4 = 4x + 4$.

- Να γράψετε την παράσταση $A = 4x - 3|x-3|$ χωρίς απόλυτη τιμή.

Είναι $x-3=0 \Leftrightarrow \ldots$, $x-3>0 \Leftrightarrow \ldots$, $x-3<0 \Leftrightarrow \ldots$ άρα

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$					

i) αν $x \geq 3$ τότε $A =$
ii) αν $x < 3$ τότε $A =$

- Να γράψετε την παράσταση $A = 5x + |x+2| - 3 \cdot |x-4|$. χωρίς απόλυτες τιμές

Είναι $x+2=0 \Leftrightarrow x=$
$x-4=0 \Leftrightarrow x=$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x-2$			0				
$x-4$					0		

i) αν $x < -2$ τότε $A =$
ii) αν $-2 \leq x < 4$ τότε $A =$
iii) αν $x \geq 4$ τότε $A =$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. $|5| =$, $|-5| =$ } δηλαδή $|5| = |-5|$ γενικά $\boxed{|-\alpha| \quad |\alpha|}$

2. $\boxed{|x^2| = \ldots}$ λόγου $x^2 \ldots 0$

3. $\boxed{-|x| \leq x \leq |x|}$

4. $|5| \cdot |-10| =$, $|5 \cdot (-10)| =$ } δηλ. $|5| \cdot |-10| \ldots |5 \cdot (-10)|$ άρα γενικά $\boxed{|\alpha| \cdot |\beta| \ldots |\alpha \cdot \beta|}$ (απόδειξη)

5. $\boxed{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}}$

6. $|5+4| = |9| = 9$, $|5| + |4| = 5+4 = 9$
όμως $|5+(-4)| = |1| = 1$, $|5| + |-4| = 5+4 = 9$
Γενικά παρατηρώ $\boxed{|\alpha+\beta| \ldots |\alpha| + |\beta|}$ (απόδειξη)

7. $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ldots y = 0$

8. $|x| + |y| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \ldots y \neq 0$

πχ $|x-3| + |y+4| = 0 \Leftrightarrow \ldots \ldots \Leftrightarrow$

9. $|x| = 5 \Leftrightarrow x =$ ή $x =$

Άρα $\boxed{|x| = \theta, (\theta > 0) \Leftrightarrow x = \quad ή \quad x =}$

$|x-4| = 8 \Leftrightarrow \ldots$

$|2x+5| = 9 \Leftrightarrow \ldots$

$|\alpha - \beta| = 4 \Leftrightarrow \ldots$

$|x| = -4 \quad \ldots$

$|x| = 0 \Leftrightarrow$

10. $\boxed{|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \ldots \text{ ή } x = \ldots}$

$|2x-2| = |x-1| \Leftrightarrow \ldots$

(11) $|x| < 5 \Leftrightarrow \ldots < x < \ldots$

$\boxed{\text{Γενικά } |x| < \theta,\ (\theta > 0) \Leftrightarrow \ldots < x < \ldots}$

- $|2x| < 8 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in (\ldots, \ldots)$
- $|x-2| < 4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in (\ldots, \ldots)$

(12) $|x| > 5 \Leftrightarrow x > \ldots$ ή $x < \ldots$

$\boxed{\text{Γενικά } |x| > \theta,\ (\theta > 0) \Leftrightarrow x > \ldots \text{ ή } x < \ldots}$

- $|2x| > 4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in$
- $|x-2| > 4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ $x \in \ldots$

Να συμπληρώσετε τις σχέσεις

1) $|x| = 6 \Leftrightarrow \ldots$	$|x| = -6 \ldots$ / $|x| = 0 \Leftrightarrow \ldots$
2) $|x| \leq 6 \Leftrightarrow \ldots$	$|x| \leq -6 \ldots$
3) $|x| \geq 6 \Leftrightarrow \ldots$	$|x| \geq -6 \ldots$
4) $|x| < 0 \Leftrightarrow \ldots$	$|x| > 0$
5) $|x| \leq 0 \Leftrightarrow \ldots$	$|x| \geq 0 \ldots$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΑΝΩ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ xx'

Παρατηρώ από το σχήμα ότι η απόσταση του σαλιγκαριού από την αρχή είναι 8 μονάδες δεξιά και της αράχνης από την αρχή είναι 5 μονάδες αριστερά άρα η μεταξύ τους απόσταση είναι $(\Sigma A) = 8+5 = 13$ μονάδες και συμβολίζεται $d(\Sigma, A) = |\Sigma - A| = |8-(-5)| = |13| = 13$ ή $d(A,\Sigma) = |A-\Sigma| = |-5-8| = |-13| = 13$

Γενικά αν έχω δύο αριθμούς α, β πάνω στον άξονα, τότε η απόσταση των εικόνων τους συμβολίζεται $d(\alpha,\beta)$ ή $d(\beta,\alpha)$ και είναι $d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta| = |\beta-\alpha|$.

πχ η απόσταση του α από το 3 είναι $d(\alpha,3) = |\alpha-3|$

πχ η απόσταση του x από το -3 είναι $d(x,-3) = |x-(-3)| = |x+3|$

πχ η απόσταση του β από το -5 είναι $\ldots$

ΠΡΟΣΟΧΗ

• $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$ Η απόσταση των α, β.

• $d(x,x_0)=\rho,\ (\rho>0) \Leftrightarrow |x-x_0|=\rho \Leftrightarrow x-x_0=\ldots$ ή $x-x_0=\ldots$

$\Leftrightarrow x=\ldots$ ή $x=\ldots$

• $d(x,x_0)<\rho,\ (\rho>0) \Leftrightarrow |x-x_0|<\rho \Leftrightarrow \ldots<x-x_0<\ldots$

$\Leftrightarrow \ \ <x< \ \ \Leftrightarrow x\in$

• $d(x,x_0)>\rho,\ (\rho>0) \Leftrightarrow \ldots$

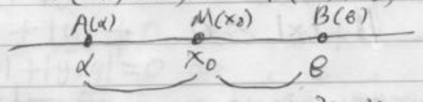
$\ldots \Leftrightarrow x\in$

• $d(x,5)=8 \Leftrightarrow$

• $d(x,5)<8 \Leftrightarrow$

• $d(x,5)>8 \Leftrightarrow$

• Αν $d(\alpha,x_0)=d(\beta,x_0) \Leftrightarrow (AM)=(MA)$



τα α, β ισαπέχουν από το x_0 δηλαδή το x_0 είναι μέσον του ευθ. τμήματος AB.

$\Leftrightarrow \ldots$

• Αν $|x|\le 3$ Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=5x+6$

• Αφού $|x|\le 3 \Leftrightarrow \ldots\le x\le\ldots \Leftrightarrow \ldots\le 5x\le\ldots$

$\Leftrightarrow \ldots\le 5x+6\le\ldots \Leftrightarrow \ldots\le A\le\ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $3 < x < 5$ να γράψετε την Παράσταση Χωρίς Απόλυτα.
$A = 8x + 2|x-3| + 6 \cdot |x-5|$

2) Αν $2 < x < y < 3$ να γράψετε την Παράσταση χωρίς απόλυτες τιμές
$A = 2|x-2| - 3|x-y| + |x-3| + |3-y|$.

3) Να γράψετε την παράσταση χωρίς απόλυτες τιμές
$A = 4x + 2 \cdot |x-5|$

4) Να γράψετε την Παράσταση Χωρίς απόλυτες τιμές
$A = 2x + 4|x-3| + 2|x+2|$

5) Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$ να γράψετε την Παράσταση Χωρίς Απόλυτες.
$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$

6) Να λυθούν οι εξισώσεις
α) $|2x-4| = 10$ β) $d(x,3) = 5$

7) Να λυθεί η εξίσωση
$|3x-4| = |x-2|$

8) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $|x-2| < 6$ β) $d(x,4) < 8$

9) Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $|x-4| > 8$ β) $d(x,2) > 6$

10) αν $|x| \leq 2$ να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της Παράστασης $A = 2x + 4$

11) αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ να βρεθεί η μέγιστη και Ελάχιστη τιμή της Παράστασης $A = 4x + 2y - 6$.

12) Να δείξετε α) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ β) $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

13) αν α, β ομόσημοι να δείξετε $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$

ΜΑΘΗΜΑ 13

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ · ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΣΤΟΧΟΣ: Να θυμηθούν οι μαθητές από το Γυμνάσιο τις ιδιότητες της τετραγ. ρίζας

• Γνωρίζω ότι $5^2 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$

Γενικά αν $\alpha \geq 0$, $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\ldots} = \ldots$

Προσοχή $\sqrt{9} = \ldots$, $\sqrt{0{,}01} = \ldots$, $\sqrt{1/4} = \ldots$

$-\sqrt{9} =$, $-\sqrt{0{,}01} =$, $-\sqrt{1/4} =$

Προσοχή αν $x^2 = 9$ (και $x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

αν $x^2 = 25$ (και $x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x = \ldots$

αν $x^2 = 100$ (και $x \geq 0$) $\Rightarrow x =$

αν $x^2 = 100$ (και $x \leq 0$) $\Rightarrow$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ Όταν έχω μια παράσταση μέσα σε ρίζα τότε πρέπει να είναι μη αρνητική

πχ $\sqrt{x-2}$ ορίζεται μόνο όταν $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$\sqrt{x+5}$ " " " " " $\ldots \Leftrightarrow \ldots$

$\sqrt{2x-8}$ " " " " " $\ldots \Leftrightarrow \ldots$

$\sqrt{10-2x}$ " " " " " $\ldots \Leftrightarrow \ldots$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ

1) $\boxed{(\sqrt{\alpha})^2 = \ldots}$ όπου $\alpha \geq 0$

$(\sqrt{x-3})^2 = \ldots$ όπου $\ldots \Leftrightarrow \ldots$

$(\sqrt{5-x})^2 = \ldots$ όπου $\ldots \Leftrightarrow \ldots$

2) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \end{array}\right\}$ άρα $\boxed{\sqrt{\alpha^2} = \ldots}$

πχ $\sqrt{(x-3)^2} = \ldots = \Big[$

Πχ $A = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1}$, $x \in R$

Να γραφεί η παράσταση χωρίς ρίζες

Λύση

$A = \sqrt{(\quad)^2} + \sqrt{(\quad)^2} = \ldots + \ldots$

α) αν

β) αν

γ) αν

(3) Παρατηρώ $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \ldots = \ldots$

$\sqrt{25 \cdot 4} = \ldots = \ldots$ } άρα $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \ldots \sqrt{\quad}$

Γενικά αν α, β μη αρνητικοί αριθμοί $\boxed{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \ldots \sqrt{\alpha \cdot \beta}}$

Πχ $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \ldots$ / $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{50} = \ldots$

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$A = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{\quad} \cdot \sqrt{\quad} = \ldots$

$A = \sqrt{50} + \sqrt{8} = \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{\quad} = \ldots + \ldots =$

(4) $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\alpha/\beta}$ όπου $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$.

$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} = \ldots$ / $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} =$

ΠΡΟΣΟΧΗ! $\sqrt{16} + \sqrt{4} =$

$\sqrt{16+4} =$ } άρα $\sqrt{\alpha+\beta} \ldots \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΜΕ ΡΗΤΟ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

$\frac{20}{\sqrt{5}} = \ldots$

$$\frac{10}{\sqrt{5}-1} = \frac{10\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{15}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dots$$

Για να δείξω μια ισότητα με τ. ρίζες ή ανισότητα όταν και τα δύο μέλη είναι θετικά τότε με ισοδυναμίες υψώνω και τα δύο μέλη στο τετράγωνο κάνω πράξεις και καταλήγω σε μια σχέση που ισχύει

Πχ αν α, β θετικοί αριθμοί να δείξετε

$$\sqrt{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

Απόδειξη.

$$\sqrt{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \underset{\text{θετικά}}{\Leftrightarrow} (\sqrt{\alpha+\beta})^2 < (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$\dots\dots \Leftrightarrow \dots\dots \text{ που ισχύει.}$$

Πχ Να βρεθεί η τιμή του α όταν ισχύει

$$\sqrt{2\alpha-1} = \sqrt{\alpha+4}$$

Περιορισμοί πρέπει $\left.\begin{matrix} 2\alpha-1 \geq 0 \\ \alpha+4 \geq 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2\alpha \geq 1 \\ \alpha \geq -4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \alpha \geq 1/2 \\ \alpha \geq -4 \end{matrix}\right\} \alpha \geq \frac{1}{2}$

Για $\alpha \geq 1/2$ και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά οπότε

$$\sqrt{2\alpha-1} = \sqrt{\alpha+4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2\alpha-1}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha+4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha-1 = \alpha+4 \Leftrightarrow 2\alpha - \alpha = 4+1 \Leftrightarrow \alpha = 5 \text{ δεκτό}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να γίνουν οι πράξεις

α) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$ β) $\dfrac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$

2) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$A = 4\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - \sqrt{75}$

$B = \sqrt{32} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50}$

$\Gamma = \dfrac{\sqrt{162} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} - \sqrt{32}}$

3) Να μετατρέψετε τις παραστάσεις με ρητό παρονομαστή

α) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ β) $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ δ) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ε) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

στ) $\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}, (\alpha \neq \beta \neq 0)$ ζ) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}-2}, (x \geq 0$ και $x \neq 4)$

4) Να βγάλετε τις ρίζες από τις παραστάσεις

α) $A = 4x\cdot\sqrt{(x-2)^2}$

β) $B = \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2-4x+4}$

γ) $\Gamma = \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$ αν $x \neq 2$.

5) Να δείξετε

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4$

ΜΑΘΗΜΑ 14

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

ΣΤΟΧΟΣ • Να μάθουν οι μαθητές ότι εκτός από τ. ρίζα υπάρχουν και άλλες ρίζες.
- Να μάθουν τις ιδιότητες της ν-οστής ρίζας
- Να δούν τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη και τις ιδιότητες τους

• Είναι $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$.
Είναι $2^4 = 16 \Leftrightarrow \ldots$
$2^5 = 32 \Leftrightarrow \ldots$

Γενικά αν $\alpha^\nu = \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\ } =$, όπου $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος

άρα $\sqrt[3]{125} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{27}$
$\sqrt[4]{625} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{243}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha, \ (\alpha \geq 0)$

2) $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, αν $\alpha \geq 0$
$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$, αν $\alpha < 0$ και ν άρτιος

δηλαδή $\sqrt[3]{2^3} = \ldots$ $\sqrt[4]{(-2)^4} = \ldots$

3) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} =$
$\sqrt[3]{8 \cdot 27} =$ $\Bigg\}$ άρα $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \ldots \sqrt[3]{8 \cdot 27}$

$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \ldots \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}}$ με $\alpha, \beta \geq 0$

4) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ με $\alpha \geq 0, \beta > 0$

5) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$

πχ $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[\cdot]{5}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{10}} = \ldots$

6) $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

πχ $\sqrt[12]{5^8} = \sqrt[4\cdot3]{5^{4\cdot2}} = \sqrt{\ldots}$

$\sqrt[30]{2^{10}} = \ldots$

7) $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\cdot\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, όπου $\alpha,\beta \geq 0$

πχ $\sqrt[5]{\alpha^{5}\cdot\beta} = \ldots$

πχ $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot2} = \ldots$

8) ΟΡΙΣΜΟΣ (ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ)

Αν $\alpha \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι ισχύει

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\mu/\nu}}$$

πχ $= .$

πχ $4^{3/2} = \sqrt{\ } = \sqrt{\ } = \ldots$

Οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και για ρητό εκθέτη και μας βοηθούν στις πράξεις με ρίζες

πχ $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = 2^{1/4}\cdot 2^{1/3} = 2^{\cdot\cdot} = 2^{\cdot\cdot} =$

πχ $\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40} = \ldots$

πχ $(\sqrt[3]{5^2})^6 = \ldots$

πχ $\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[4]{5}} = \ldots$

πχ $\sqrt[5]{160} = \sqrt[5]{\ } = \ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

1) α) $8^{2/3}$ β) $4^{1/2}$ γ) $25^{-1/2}$ δ) $4^{-3/2}$.

2) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

α) $\sqrt[3]{16}$ β) $\sqrt[6]{640}$ γ) $\sqrt[3]{54}$

3) Να γίνουν οι πράξεις

α) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$ β) $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{25}$ γ) $\dfrac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[3]{2}}$

4) Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A=\sqrt[3]{(x-2)^3}+\sqrt[3]{(x-1)^3}$$

$$B=\sqrt[4]{(x-2)^4}+\sqrt[4]{(x-1)^4}.$$

ΜΑΘΗΜΑ 15

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha x = \beta$

ΣΤΟΧΟΣ: • Να θυμηθούν οι μαθητές να λύνουν εξισώσεις α' βαθμού

• Να μπορούν να κάνουν διερεύνηση μιας παραμετρικής εξίσωσης α' βαθμού

• Να γράψετε τη λύση κάθε μιας εξίσωσης

α) $2x = 10 \Leftrightarrow x = \ldots$

β) $3x = 10 \Leftrightarrow x = \ldots$

γ) $0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow \ldots$

δ) $0x = 10 \ \ldots$

ε) $5x = 0 \Leftrightarrow$

Παρατηρώ ότι η λύση της εξίσωσης $\alpha x = \beta$ εξαρτάται από τις τιμές των α, β

i) αν $\alpha \neq 0$ τότε $x =$

ii) αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε

iii) αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε

• Η εξίσωση $(\lambda-2)\cdot x = \lambda$ για $\lambda = 2$ . . . . .

• Η εξίσωση $(\lambda-2)\cdot x = \lambda^2-4$ για $\lambda = 2$ . . . .

• Η εξίσωση $(\lambda-2)\cdot x = \lambda$ για $\lambda \neq 2$ . . . . . .

• Να λυθεί η εξίσωση $(\lambda-2)x = \lambda^2-4$.

[illegible]

$\ldots = 0 \Leftrightarrow \lambda-2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ [illegible]

$\ldots \neq 2$ τότε . . . . .

$\ldots = 2$ τότε [illegible]

[illegible] η εξίσωση $\lambda^2 x = 4x + \lambda - 2$.

[illegible]είναι $\lambda^2 x = 4x + \lambda - 2 \Leftrightarrow$

$\ldots \lambda - 2 \Leftrightarrow (\lambda^2-4)\cdot x = \lambda - 2 \Leftrightarrow$

$\ldots +2)\cdot x = \lambda - 2$ με $\alpha = (\lambda-2)(\lambda+2)$ και $\beta = \lambda - 2$

$\ldots(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

α) αν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$ τότε . . . .
β) αν $\lambda = 2$ τότε . . . . . .
γ) αν $\lambda = -2$ τότε . . . . .

• Να λυθεί η εξίσωση
α) $2(x-4)+3x=5x+6$.
β) $3(x-4)+2x=5x-12$
γ) $3(x-4)-2(3x-1)=4x-2(x-3)$

Λύση

α)

β)

γ)

• Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-3}{4}-\frac{x-1}{3}=2-\frac{2x-1}{2}$

• Να επιλυθεί ο τύπος $\alpha\beta+\gamma\delta=\gamma\theta$.
α) ως προς β β) ως προς γ.

α) $\alpha\beta+\gamma\delta=\gamma\theta \Leftrightarrow \alpha\beta=\gamma\theta-\gamma\delta \Leftrightarrow \beta=$ ______

β) $\alpha\beta+\gamma\delta=\gamma\theta \Leftrightarrow \gamma\delta-\gamma\theta=-\alpha\beta \Leftrightarrow$
$\gamma(\delta-\theta)=-\alpha\beta \Leftrightarrow \gamma=$ ______

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2\cdot(x-5) - 3\cdot(x-1) = 6x - 8$.

β) $5(x-3) - 2(x+2) = 3x - 4$

γ) $5(x-1) - 3(x-4) = 2x + 7$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\frac{3x-4}{2} = \frac{x-1}{3}$

β) $\frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{3} = 2 - \frac{x-1}{4}$.

3) $2x - \frac{5-x}{3} = \frac{7x-5}{3}$.

3) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4}$. β) $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

α) $(\lambda-5)\cdot x = \lambda^2 - 5\lambda$.

β) $\lambda x - \lambda^2 = 3(x-3)$

γ) $(\lambda^2-9)x = \lambda^2 - 6\lambda + 9$.

5) Να επιλυθούν οι τύποι

α) $F = m\cdot\gamma$ ως προς γ.

β) $U = U_0 + \alpha t$ ως προς t

γ) $X = U_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ως προς α

ΜΑΘΗΜΑ 16.
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ.

ΣΤΟΧΟΣ: Να μάθουν οι μαθητές να απαλλάσουν τις εξισώσεις από τις απόλυτες τιμές και να βρίσκουν τις λύσεις.

$\boxed{A}$ 1η μορφή $|x| = \theta$, (όπου $\theta > 0$) $\Leftrightarrow x = ..$ ή $x = ..$

Πχ1 $|x| = 5 \Leftrightarrow x = ..$ ή $x = ..$

Πχ2 $|2x-4| = 8 \Leftrightarrow 2x-4 = ..$ ή $2x-4 = ..$
$\Leftrightarrow$ ή
$\Leftrightarrow$ ή
$\Leftrightarrow$ ή

Πχ3 $||2x-6|-2| = 8 \Leftrightarrow |2x-6|-2 = ..$ ή $|2x-6|-2 = ..$
$\Leftrightarrow |2x-6| = ..$ ή $|2x-6| = ..$
$\Leftrightarrow$ ή
$\Leftrightarrow$ ή
$\Leftrightarrow$ ή

$\boxed{B}$ 2η μορφή $|x| = -4$ . . . . .
Πχ $|2x-6| = -4$ . . .

$\boxed{\Gamma}$ 3η μορφή $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = ..$ ή $x = ..$

$\boxed{\text{Πχ1}}$ $|2x-6| = |x-2| \Leftrightarrow 2x-6 = ..$ ή $2x-6 = ..$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$

$\boxed{\Delta}$ 4η μορφή $|f(x)| = g(x)$
α) αν $g(x) < 0$ τότε η εξίσωση αδύνατη
β) αν $g(x) \geq 0$ τότε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

Πχ. $|2x-3| = 3x-2$

α) αν $3x-2<0 \Leftrightarrow 3x<2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$ τότε . . . . .

β) αν $3x-2\geq 0 \Leftrightarrow 3x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \frac{2}{3}$ τότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $2x-3=$ . . ή $2x-3=$ . . .

$\Leftrightarrow$ . . . . .

$\Leftrightarrow$ . . . .

$\Leftrightarrow$ . . . .

Προσοχή η λύση πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό άρα. Λύση είναι . . . .

$\boxed{E}$ 5η μορφή

Πχ1 $\frac{2|x|+1}{3} - \frac{|x|-1}{2} = \frac{1}{2}$

Θέτω $|x|=y$ με $y\geq 0$ και η εξίσωση γίνεται

$\frac{2y+1}{3} - \frac{y-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ . . . . .

Πχ2 $\frac{2|x-1|-4}{3} = \frac{|3x-3|}{5} \Leftrightarrow \frac{2|x-1|-4}{3} = \frac{3\cdot|x-1|}{5}$

Θέτω $|x-1|=y$ με $y\geq 0$ και η εξίσωση γίνεται

. . . .

ΣΤ 6η μορφή με δύο απόλυτες τιμές

πχ. να λυθεί η εξίσωση

$$4|x-2| - 2|x-1| = 2$$

Είναι $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Είναι $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

άρα πίνακας προσήμων:

x		1		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$

α) αν $x \leq 1$ τότε η εξίσωση γίνεται . . .

β) αν $1 \leq x \leq 2$ τότε η εξίσωση γίνεται . . .

γ) αν $x \geq 2$ τότε η εξίσωση γίνεται . . .

Ζ 7η μορφή $|x|+|y|=0 \Leftrightarrow x=0$ και $y=0$

πχ να λυθεί η εξίσωση

$|x-2| + |x^2-2x| = 0 \Leftrightarrow$

$x-2=0$ και $x^2-2x=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ και $x\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ και $x=0$ ή $x=2$ άρα τελικά $x=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $|2x-10|=0$ β) $|2x-10|=20$ γ) $|8-4x|=6$

δ) $|2x-8|=-4$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|4x-10|=|2x-4|$ β) $|2x-6|=|4-x|$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $|3x-4|=x+4$ β) $|2x+6|=12-x$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\dfrac{2|x|-4}{4}+\dfrac{|x|+1}{2}=\dfrac{|x|+2}{3}$

β) $\dfrac{|x-2|-4}{2}+\dfrac{|x-2|+1}{3}=\dfrac{|2x-4|}{3}$

5) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2|x-3|+|x-1|=7$

β) $|2x-4|+|x-3|=5$

6) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $|x-3|+|x^2-3x|=0$

β) $|x-4|+|x^2-16|=0$

7) Να λυθεί η εξίσωση

$$|3x-5|=\sqrt{x^2-2x+1}$$

ΜΑΘΗΜΑ 17

$\boxed{\text{Η ΕΞΙΣΩΣΗ } x^\nu = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{ΣΤΟΧΟΣ}}$ Λύση της εξίσωσης ανάλογα με τις τιμές του ν και του α.

α) Η εξίσωση $x^4 = 0 \Leftrightarrow$ . . αφού $0^4 = 0$

β) είναι $2^4 = 16$ και $(-2)^4 = 16$ άρα η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $2, -2$ άρα

Η εξίσωση $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$ ή $x = -\sqrt[4]{16} = -2$

ομοίως $x^6 = 64 \Leftrightarrow x =$ . . ή $x =$ . . .

ομοίως $x^4 = 10 \Leftrightarrow x =$ ή $x =$

γ) $x^4 = -16$ είναι . . . . αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός να υψώνεται σε άρτια δύναμη και να δίνει . . . . αποτέλεσμα.

δ) Είναι $2^3 = 8$ άρα η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει μοναδική ρίζα τον $x = \sqrt[3]{8} = 2$.

ομοίως $x^3 = 27 \Leftrightarrow x =$

ομοίως $x^5 = 32 \Leftrightarrow x =$

$x^5 = 10 \Leftrightarrow x =$

ε) Είναι $(-2)^3 = -8$ άρα η εξίσωση $x^3 = -8$ έχει μοναδική ρίζα τον $x = -\sqrt[3]{8} = -2$

ομοίως $x^3 = -27 \Leftrightarrow x =$

$x^5 = -32 \Leftrightarrow x =$

$x^5 = -10 \Leftrightarrow x =$

- να λυθούν οι εξισώσεις

$x^8 = 1 \Leftrightarrow$ . . . .

$x^8 = -1 \Leftrightarrow$ . . .

$x^7 = 1 \Leftrightarrow$ . . . .

$x^7 = -1 \Leftrightarrow$ . . . .

- $3x^4-48=0 \Leftrightarrow$
- $2x^5-64=0 \Leftrightarrow$
- $2x^5+64=0 \Leftrightarrow$
- $x^5-81x=0 \Leftrightarrow$
- $x^{15}+81x^{10}=0 \Leftrightarrow$
- $x^6-32x=0 \Leftrightarrow$
- $x^{10}+32x^5=0 \Leftrightarrow$

ΓΕΝΙΚΑ Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\boxed{x^\nu=\alpha}$

α) αν ν άρτιος και $\alpha>0$ έχει δύο ρίζες $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$, $x=-\sqrt[\nu]{\alpha}$
β) αν ν άρτιος και $\alpha<0$
γ) αν ν περιττός και $\alpha>0$ . . . . . .
δ) αν ν περιττός και $\alpha<0$ . . . .

- Να λυθεί η εξίσωση $(x+2)^5-32=0$.

λύση

$(x+2)^5-32=0 \Leftrightarrow (x+2)^5=32 \Leftrightarrow x+2=\sqrt[5]{} \Leftrightarrow$
$x=$

- Να λυθεί η εξίσωση $5(x-3)^4-80=0 \Leftrightarrow$

$5(x-3)^4=80 \Leftrightarrow$ . . . .

. . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^3-125=0$ β) $x^3+125=0$ γ) $x^5-243=0$

δ) $x^6-64=0$ ε) $x^6+64=0$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^8-625x^4=0$ β) $x^7-x=0$ γ) $x^9+x=0$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $3x^5-24x^2=0$ β) $5x^5+40x^2=0$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $(x+1)^3=64$ β) $125\cdot(x-1)^3=1$ γ) $(x-3)^5-32=0$

5) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $(x-1)^4-27(x-1)=0$ β) $(x-2)^4-81=0$

ΜΑΘΗΜΑ 18.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β ΒΑΘΜΟΥ

ΣΤΟΧΟΣ: Να θυμηθούν οι μαθητές την επίλυση εξίσωσης β' βαθμού από το γυμνάσιο.

① μορφή $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

πχ1. $5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = .$

πχ2 $(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow . . . \Leftrightarrow x = .$

② μορφή $x^2 = \alpha, (\alpha > 0) \Leftrightarrow x = \pm . . .$

- $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = . .$
- $3x^2 = 75 \Leftrightarrow x^2 = \frac{75}{3} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow . . . .$
- $5x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow . . . . .$
- $3x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow . . . .$

③ μορφή $x^2 = \alpha$ με $(\alpha < 0)$ είναι αδύνατη.

$x^2 = -4 . . .$

- $3x^2 + 75 = 0 \Leftrightarrow$
- $(x+5)^2 = -3 . . . . .$

④ μορφή $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$, (Κοινός παράγοντας)

- $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x - 3 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 3$
- $x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow$
- $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$
- $9x^2 = 4x \Leftrightarrow$

⑤ μορφή Τέλειο Τετράγωνο

- $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow . . . \Leftrightarrow$
- $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow . . . .$
- $4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow . . . . .$

(6η) μορφή $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow (\quad)\cdot(\quad)=0$

- $x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x+2)=0 \Leftrightarrow$
  $x+3=0$ ή $x+2=0 \Leftrightarrow \ldots$
- $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \ldots$
- $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \ldots$
- $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow \ldots$

(7η) μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $(\alpha\neq0, \beta\neq0, \gamma\neq0.)$

είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow$

$\alpha x^2+\beta x=-\gamma \Leftrightarrow$ (πολλαπλας. με 4α)

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x=-4\alpha\gamma \Leftrightarrow$ (προσθέτω β^2)

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma \Leftrightarrow$

$(\qquad)^2=\beta^2-4\alpha\gamma \Leftrightarrow$ (αν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$)

$\ldots$

Άρα τύπος $x_{1,2}=\frac{\quad}{\quad}$ με $\Delta=\ldots>0$

πχ1 $3x^2-4x+1=0$

$\Delta=$ $\qquad$ $x=$

πχ2 $\;x^2+\;x+\;=0$

$\Delta=$ $\qquad$ $x=$

πχ3 $x^2-3x+5=0$, $\Delta=$

Στην περίπτωση που $\alpha \neq 0$ η εξίσωση είναι β' βαθμού και

Άρα α) αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες $x_{1,2} = $ ______

β) αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές ίσες (μια διπλή ρίζα) $x = $ ______

γ) αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

• Να λυθεί η εξίσωση

$$(x-2)\cdot(x-1) + (x-1)^2 = 6 \Leftrightarrow$$ πράξεις · κτλ

•

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2-100=0$ β) $3x^2-48=0$ γ) $2x^2-20=0$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2+100=0$ β) $2x^2+20=0$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις.

α) $x^2-5x=0$ β) $2x^2-10x=0$ γ) $5x^2-4x=0$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις.

α) $x^2-20x+100=0$ β) $4x^2-4x+1=0$ γ) $9x^2-6x+1=0$

5) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2+7x+12=0$ β) $x^2+7x+12=0$ γ) $x^2-x-12=0$

δ) $x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})x+\sqrt{10}=0$

6) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $2x^2-11x+5=0$ β) $3x^2-10x+3=0$

γ) $5x^2+6x+1=0$

7) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $(x-3)^2+(x-3)\cdot(x+1)=6$

β) $(x-2)^2+(x^2-4)=4(x-2)$

ΜΑΘΗΜΑ 19.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ Β' ΒΑΘΜΟΥ

ΣΤΟΧΟΣ • Να μάθουν οι μαθητές να κάνουν κατάλληλη μεταβλητής και να μετατρέπουν εξισώσεις σε δευτεροβάθμιες
• Να λύνουν κλασματικές εξισώσεις

• Να λυθεί η εξίσωση

$$(x-2)^2 - 10\cdot|x-2| + 9 = 0$$

Γνωρίζω ότι $|(x-2)^2| = (x-2)^2$ άρα η εξίσωση γίνεται

$$|x-2|^2 - 10|x-2| + 9 = 0$$ θέτω $|x-2| = y$, $(y \geq 0)$

οπότε έχω $y^2 - 10y + 9 = 0$ λύνω την εξίσωση κτλ

• Να λυθεί η εξίσωση

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) + 6 = 0 \quad \text{με } x \neq 0$$

• Να λυθεί η εξίσωση $x^4-9x^2+8=0$ (διτετράγωνη)

$\boxed{A\cdot B=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ή } B=0}$

• Να λυθεί η εξίσωση $x^3-3x^2+2x=0$

• Να λυθεί η εξίσωση $x^3-3x^2-4x+12=0$

• ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$$

Βήμα 1/ Παραγοντοποιώ τους παρονομαστές (αν γίνεται)

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$$

Βήμα 2/ Περιορισμοί πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow$. και $x\neq 0$

με αυτούς τους περιορισμούς η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

Βήμα 3/ πολλαπλασιάζω με το ΕΚΠ $=x(x-1)$ κάθε όρο.

$$x(x-1)\cdot\frac{3x-1}{x-1}-x(x-1)\cdot\frac{2}{x}=x(x-1)\cdot\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)} \Leftrightarrow$$

. . . .

Βήμα 4/ ελέγχω μήπως κάποια από τις λύσεις απορρίπτονται λόγω περιορισμών . . . . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-3|x|-4=0$.
2) Να λυθεί η εξίσωση $(x-3)^2-8|x-3|-9=0$.
3) Να λυθεί η εξίσωση $(x^3-5)^2-4(x^3-5)+3=0$
4) Να λυθεί η εξίσωση $x^{10}-33x^5+32=0$.
5) Να λυθεί η εξίσωση $x^5-5x^3+6x^2=0$
6) Να λυθεί η εξίσωση $x^3-5x^2-4x+20=0$.
7) Να λυθεί η εξίσωση $x^3+2x^2-4x-8=0$
8) Να λυθεί η εξίσωση $x^5-9x^3=0$.
9) Να λυθεί η εξίσωση $x^{2014}=4x^{2012}$
10) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2}{x}+\frac{2x-3}{x-2}=\frac{x^2-2}{x^2-2x}$
11) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$
12) Αν η εξίσωση $x^4-10x^2+\alpha=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 i) Να βρεθεί ο αριθμός α.
ii) Να λυθεί η εξίσωση

ΜΑΘΗΜΑ 20

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β' Βαθμού

ΣΤΟΧΟΣ: Να μάθουν οι μαθητές να διερευνούν πόσες ρίζες έχει μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$
- αν $\alpha=0$ τότε η εξίσωση γίνεται $\beta x+\gamma=0$ και είναι α' βαθμού και αν $\beta\neq 0$ τότε έχει μια ακριβώς ρίζα
- αν $\alpha\neq 0$ τότε η εξίσωση είναι β' βαθμού οπότε
  - α) αν $\Delta>0$ έχει . . .
  - β) αν $\Delta=0$ έχει
  - γ) αν $\Delta<0$

Πχ1 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)x^2-4x+\lambda=0$
Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει μια ακριβώς ρίζα.

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$
και για να έχει μια ακριβώς ρίζα πρέπει $\alpha=$
δηλαδή $\lambda-2=\ \Leftrightarrow$
για $\lambda=.$ η εξίσωση γίνεται . . . . που
έχει μια ρίζα την $x=. . .$

Πχ2 Δίνεται η εξίσωση $x^2-(2\lambda-2)x+\lambda+3=0$
Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$
με $\alpha=1\neq 0$ άρα είναι β' βαθμού πάντα.
Έχει $\Delta= . . . .$
$= . . . . .$
Για να έχει μια διπλή ρίζα πρέπει

$\Delta =$ δηλαδή . . . .

(Πx3) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 3)x + \lambda - 4 = 0$
Να εξετάσετε πόσες ρίζες έχει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
με $\alpha = \lambda$ $\beta = 2\lambda - 1$ $\gamma = \lambda - 4$

α) αν $\lambda = 0$ τότε η εξίσωση είναι α' βαθμού
και για $\lambda = 0$ γίνεται $-x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4$
δηλαδή έχει ακριβώς μια ρίζα

β) αν $\lambda \neq 0$ τότε η εξίσωση είναι β' βαθμού και
$\Delta = . . .$
$= . . .$

i) αν $\Delta = 0 \Rightarrow . . .$

ii) αν $\Delta > 0 \Rightarrow . . . .$

iii) αν $\Delta < 0 \Rightarrow . . .$

(Πx4) $\lambda^2 x^2 - 2\lambda^3 x + \lambda^4 - 1 = 0$
Να λυθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
με $\alpha = . .$ $\beta = . .$ $\gamma = ...$

α) αν

β) αν τότε $\Delta =$