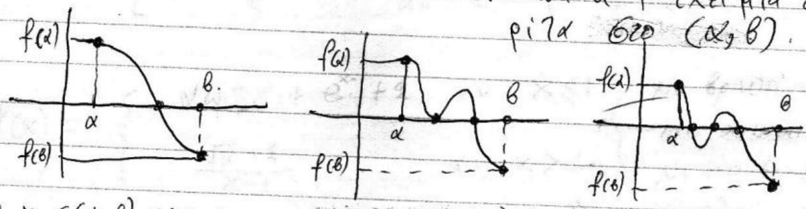
ΜΑΘΗΜΑΤΑ 2 (24, 25)

ΘΕΩΡΗΜΑ Bolzano.

1 Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$. } Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή η f έχει μια τουλαχ ρίζα στο (α, β).

2 

Ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$ μια ρίζα στο (α, β)

Δύο ρίζες στο (α, β)

τρεις ρίζες στο (α, β).

ΠΡΟΣΟΧΗ 1 Οι προτάσεις

α) υπάρχει ένα τουλαχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλαχ. ρίζα στο (α, β)

γ) Η f έχει μια τουλαχ. ρίζα στο (α, β)

δ) Η γραφ. παρ. της f τέμνει τον άξονα xx' σε ένα τουλ. $x_0 \in (\alpha, \beta)$

είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

ΠΡΟΣΟΧΗ 2 Αν ισχύει το Θ. Bolzano και η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ Τότε έχει ακριβώς μια ρίζα στο (α, β)

ΠΡΟΣΟΧΗ 3.

Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta) \leq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0 \\ \text{ή} \\ f(\alpha) = 0 \text{ ή } f(\beta) = 0 \end{array} \right\}$ τότε η f έχει μια τουλαχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$

ΠΡΟΣΟΧΗ 4. Αν η f συνεχής σε ένα διάστημα Α και έχει διαδοχικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ τότε ανάμεσα στις ρίζες διατηρεί πρόσημο. είναι όλο θετική ή όλο αρνητική

$\boxed{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ 5}}$ Αν η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in Δ$ τότε
$f(x) > 0$ για κάθε $x \in Δ$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in Δ$.
δηλαδή η f διατηρεί πρόσημο στο Δ.
και αν βρω ένα $α \in Δ$ ώστε $f(α) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in Δ$.
και αν βρω ένα $β \in Δ$ ώστε $f(β) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in Δ$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ 6}}$ Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το Π. ορισμού της.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$\boxed{\text{1. μορφή}}$ $\boxed{\text{Η f ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ ΣΤΟ } (α,β)}$

$\boxed{\text{Άσκηση 1.}}$ Έστω $f(x) = 4x^3 - 4\pi x - 3$.
Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση.

- Η f είναι συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο $(0,1)$
- $\left.\begin{array}{l} f(0) = -3 \\ f(1) = 1. \end{array}\right\} f(0)\cdot f(1) < 0$

άρα ισχύει το Θ. Bolzano. άρα υπάρχει ένα τουλάχ $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 0$ δηλαδή η f έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(0,1)$

* ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΔΙΚΛΑΔΗ

$\boxed{\text{2. μορφή}}$ $\boxed{\text{Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ ΣΤΟ } (α,β)}$

$\boxed{\text{Άσκηση 2.}}$ Να δείξετε ότι η εξίσωση $5x^5 = 2e^x - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Λύση.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $5x^5 = 2e^x - 1 \Leftrightarrow$
$5x^5 - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ αν θέσω $f(x) = 5x^5 - 2e^x + 1$

- Η f συνεχής στο R ως πρ. συν. συναρ. άρα και στο $[0,1]$
- $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 6 - 2e > 0$ άρα $f(0)\cdot f(1) < 0$.

Άρα ισχύει Θ. Bolzano άρα η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(0,1)$ άρα και η ισοδύναμη αρχική εξίσωση.

Άσκηση 3/. Να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{x^5+1}{x-1}+\frac{x^{10}+1}{x-2}=0$$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση.

Επειδή για $x=1$, $x=2$ η εξίσωση δεν ορίζεται μετατρέπω την εξίσωση. Για κάθε $x\neq1$ και $x\neq2$ η εξίσωση γίνεται $(x^5+1)(x-2)+(x-1)(x^{10}+1)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=(x^5+1)(x-2)+(x-1)(x^{10}+1)$.

- Η f συνεχής στο R άρα και στο $[1,2]$ ως πράξ. συνεχ. συναρτ.
- $\left.\begin{matrix} f(1)=-2<0 \\ f(2)=2^{10}+1>0 \end{matrix}\right\} f(1)\cdot f(2)<0$

άρα ισχύει το Θ. Bolzano άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλαχ. ρίζα στο $(1,2)$. Και αφού η ρίζα είναι διαφορ. από το 1 και το 2 τότε είναι ρίζα και της ισοδύναμης αρχικής εξίσωσης.

Άσκηση 4/ Αν η f συνεχής στο R να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{4-2x}{x^2-4x+3}$ έχει μία τουλαχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

Λύση.

Για $x\neq1$, $x\neq3$ που είναι ρίζες του παρονομαστή η εξίσωση γράφεται $f(x)\cdot(x^2-4x+3)=4-2x \Leftrightarrow$ $f(x)\cdot(x^2-4x+3)+2x-4=0 \Leftrightarrow g(x)=0$ αν θέσω $g(x)=(x^2-4x+3)\cdot f(x)+2x-4$.

- Η g συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξ. συν. συναρτ.
- $\left.\begin{matrix} g(1)=-2<0 \\ g(3)=2>0 \end{matrix}\right\} g(1)\cdot g(3)<0$.

άρα ισχύει το Θ. Bolzano άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλαχ. ρίζα στο $(1,3)$ άρα και η ισοδύναμη αρχική αφού η ρίζα είναι διαφορετική από 1 και 3.

$\boxed{3^{η}\ μορφή}$ Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΡΙΖΑ ΣΤΟ $(α,β)$ (Bolzano + μονοτονία).

Άσκηση 5| Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$e^x = 5-5x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $e^x=5-5x \Leftrightarrow e^x+5x-5=0 \Leftrightarrow f(x)=0$
αν θέσω $f(x)=e^x+5x-5$.

• Η f συνεχής στο R ως πρ. συν. συνάρ. άρα και στο $[0,1]$

• $f(0)=-4$, $f(1)=e$ } $f(0)\cdot f(1)<0$

άρα ισχύει το Θ. Bolzano άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλ. ρίζα στο $(0,1)$.

• όμως η f είναι και γνησίως μονότονη αφού για κάθε $x_1<x_2 \in R$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)
και $5x_1-5<5x_2-5$ (2)

οπότε: $e^{x_1}+5x_1-5<e^{x_2}+5x_2-5$ δηλαδή $f(x_1)<f(x_2)$
άρα η f γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο $(0,1)$
άρα η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$
άρα και η αρχική εξίσωση

$\boxed{4^{η}\ μορφή}$ Για να δείξω ότι η $f(x)=0$ έχει 2 τουλαχ. ρίζες στο $(α,β)$
Χωρίζω το διάστημα σε δύο υποδιαστήματα $(α,γ)$ και $(γ,β)$ και σε κάθε ένα κάνω Θ.Β.

Άσκηση 6.| Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$x^3=6x^2-1$ έχει 2 τουλαχιστον ρίζες στο $(-1,1)$

Λύση

Η εξίσωση γίνεται $x^3=6x^2-1 \Leftrightarrow x^3-6x^2+1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$
Αν θέσω $f(x)=x^3-6x^2+1$. Η f συνεχής στο $[-1,0]$, $[0,1]$

$f(-1)=-6$, $f(0)=1$, $f(1)=-4$ } $f(0)\cdot f(-1)<0$ και $f(0)\cdot f(1)<0$
άρα η f έχει μία τουλαχ ρίζα στο $(-1,0)$ και μία στο $(0,1)$
άρα έχει 2 τουλαχ ρίζες στο $(-1,1)$

192

Προσοχή: Όταν δίνεται μια συναρτησιακή ισότητα στην οποία υπάρχει μια συνάρτηση f συνεχής.
Είναι διαφορετικές οι προτάσεις.
- Η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)
- Η εξίσωση ολόκληρη έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

5η μορφή

Άσκηση 7) Αν η f συνεχής στο $[0,1]$ και $f^3(x)+f(x)=4x-1$. Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλαχ. ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση.

Είναι $f^3(x)+f(x)=4x-1 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1)=4x-1$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{4x-1}{f^2(x)+1}$ αφού $f^2(x)+1\neq 0$

- Η f συνεχής στο $[0,1]$.
- $f(0)=\frac{-1}{f^2(0)+1}<0$, $f(1)=\frac{3}{f^2(1)+1}>0$ $\Big\}$ $f(0)\cdot f(1)<0$.

Άρα ισχύει το Θ. Bolzano δηλαδή η f έχει μια τουλαχ. ρίζα στο $(0,1)$

6η μορφή

Άσκηση 8) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $-1<f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f^2(x)=2f(x)+3x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Λύση.

Η εξίσωση γράφεται $f^2(x)-2f(x)-3x=0 \Leftrightarrow g(x)=0$.

Αν θέσω $g(x)=f^2(x)-2f(x)-3x$.

- Η g συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτ.
- $g(0)=f^2(0)-2f(0)=f(0)\cdot(f(0)-2)>0$ αφού $f(0)<0$ και $f(0)-2<0$.

$g(1)=f^2(1)-2f(1)-3=(f(1)-3)(f(1)+1)<0$.

Λόγω $f(1)-3<0$ και $f(1)>-1 \Leftrightarrow f(1)+1>0$.

Άρα $g(0)\cdot g(1)<0$ άρα ισχύει Θ. Bolzano.
άρα η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχ ρίζα στο $(0,1)$ άρα και η ισοδύναμη αρχική εξίσωση.

7η μορφή Η f έχει μία τουλάχ ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

Άσκηση 9 Αν η f συνεχής στο R και ισχύει $f(\alpha)+5f(\beta)=0$ να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχ ρίζα στο $[\alpha,\beta]$

Λύση.

- Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)=-5f(\beta)\cdot f(\beta)=-5f^2(\beta)\leq 0$

άρα

$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ ή $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0 \Leftrightarrow$
ισχύει το Θ Bolzano | $f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$.
άρα υπάρχει
$x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$

άρα $f(x_0)=0$ με $x_0\in(\alpha,\beta)$ ή $f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$.
άρα Η f έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

8η μορφή Για να δείξω ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f,g τέμνονται σε ένα τουλάχ. σημείο με τετμημένη στο (α,β) Αρκεί να δείξω ότι η εξ. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ έχει μία τουλάχ ρίζα στο (α,β).

Άσκηση 10 Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\ln x$, $g(x)=1/x$ τέμνονται σε ένα τουλάχ σημείο με τετμημένη $x_0\in(1/e,e)$

Λύση

Λύση

Αρκεί να δείξω ότι η εξ. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow$ $\ln x = 1/x \Leftrightarrow \ln x - 1/x = 0 \Leftrightarrow h(x)=0$. αν θέσω $h(x)=\ln x - 1/x$ έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(1/e, e)$

- Η η h συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξ. συνεχών συναρτ. άρα και στο $(1/e, e)$.
- $h(1/e) = \ln 1/e - \frac{1}{1/e} = \ln e^{-1} - e = -1-e<0$
- $h(e) = \ln e - 1/e = 1 - 1/e = \frac{e-1}{e} > 0$

$h(1/e) \cdot h(e) < 0$

άρα η h έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(1/e, e)$

Γη. μορφή για να δείξω ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα, όταν δεν δίνεται διάστημα (α, β)

Τότε με δοκιμή βρίσκω αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)>0$ και αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε λόγω Θ. Bolzano έχει μια τουλάχ ρίζα.

Άσκηση 11/ Αν η $f(x) = e^x - 1/x$, $x>0$.

Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχ. ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Λύση

Παρατηρώ ότι $f(1) = e-1>0$
και $f(1/3) = e^{1/3} - 3 = \sqrt[3]{e} - 3 < 0$
και αφού η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτ θα είναι συνεχής και στο $[1/3, 1]$ άρα ισχύει Θ. Bolzano άρα η f έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(1/3, 1)$ άρα μια τουλ. ρίζα στο $(0,+\infty)$

$\boxed{10^{η} \text{ μορφή}}$ Για να δείξω ότι υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ ώστε $A(x_0) = B(x_0)$.
Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει μία τουλάχ ρίζα στο $(α, β)$ όπου $f(x) = A(x) - B(x)$.

$\boxed{\text{Άσκηση 12}}$ Να δείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (1, e)$ ώστε $ξ\ln ξ + \ln ξ = e$

Λύση.

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $x\ln x + \ln x = e \Leftrightarrow x\ln x + \ln x - e = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(1, e)$ αν θέσω $f(x) = x\ln x + \ln x - e$.

· Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $[1, e]$.

· $\left.\begin{array}{l} f(1) = -e < 0 \\ f(e) = 1 > 0 \end{array}\right\} f(1) \cdot f(e) < 0$ άρα ισχύει.

Θ. Bolzano άρα η f έχει μία τουλ. ρίζα στο $(1, e)$ δηλ. υπάρχει $ξ \in (1, e)$ ώστε $f(ξ) = 0 \Leftrightarrow ξ\ln ξ + \ln ξ - e = 0 \Leftrightarrow ξ\ln ξ + \ln ξ = e$.

Άσκηση 13/

Αν η f συνεχής στο $[-3, 3]$ και $-3 < f(x) < 3$ για κάθε $x \in [-3, 3]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-3, 3)$ ώστε $f(x_0) = x_0$.

Λύση

Αρκεί να δείξω ότι η εξ. $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$ έχει μία τουλ ρίζα στο $(-3, 3)$ αν θέσω $h(x) = f(x) - x$.

· Η h συνεχής στο $[-3, 3]$ ως πράξ συνεχ. συναρτ.

· $h(3) = f(3) - 3 < 0$ αφού $f(x) \le 3$. άρα και $f(3) < 3 \Leftrightarrow f(3) - 3 < 0$

$h(-3) = f(-3) + 3 > 0$ αφού $f(x) > -3$ άρα και $f(-3) > -3 \Leftrightarrow f(-3) + 3 > 0$.

Άρα $h(3)\cdot h(-3)<0$ άρα ισχύει το Θ. Bolzano
άρα η h έχει μια τουλ. ρίζα στο $(-3,3)$
άρα υπάρχει $x_0 \in (-3,3)$ ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$
$\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Άσκηση 13| Αν η f συνεχής στο $[0,1]$ και για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $0<f(x)<2$. (1)
Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$f^2(x_0)=2f(x_0)-3x_0$$

Λύση.

Έστω $h(x)=f^2(x)-2f(x)+3x$.

• Η h συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξ. συνεχ. συναρτ.

• $h(0)=f^2(0)-2f(0)=f(0)(f(0)-2)<0$ αφού $f(0)>0$
και $f(0)<2 \Leftrightarrow f(0)-2<0$ από την (1) για $x=0$.

και $h(1)=f^2(0)-2f(0)+3=(f(0)-1)^2+2>0$.

άρα $h(0)\cdot h(1)<0$ άρα ισχύει το Θ. Bolzano
άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow$
$f^2(x_0)-2f(x_0)+3x_0=0 \Leftrightarrow f^2(x_0)=2f(x_0)-3x_0$

11η μορφή Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)<0$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x)>0$ ή αντίστροφα.

Τότε υπάρχουν κ κοντά στο α ώστε $f(\kappa)<0$ και
λ κοντά στο β ώστε $f(\lambda)>0$

άρα $f(\kappa)\cdot f(\lambda)<0$ οπότε από Θ.Β. υπάρχει $x_0\in(\kappa,\lambda)$
ώστε $f(x_0)=0$.

Άσκηση 14| Αν η f συνεχής στο $(0,+\infty)$
και $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-4x+2}{x^2}=4$ και $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$

Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχ. θετική ρίζα.

Λύση.

Έστω $g(x) = \frac{f(x)-4x+2}{x^2}$, $x>0$ τότε $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 4$.

και $f(x) = x^2 \cdot g(x) + 4x - 2$ άρα.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 g(x) + 4x - 2) = 0\cdot 4 + 4\cdot 0 - 2 = -2 < 0$

άρα υπάρχει αριθμός $k>0$. ώστε. $f(k)<0$.

Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x>0$ τότε $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 2$

και $f(x) = x\cdot h(x)$ οπότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot g(x)) = +\infty$

άρα υπάρχει αριθμός $\lambda>0$ σε μια περιοχή του $+\infty$ ώστε $f(\lambda)>0$

και αφού $f(k)\cdot f(\lambda)<0$ και η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα και στο $[k,\lambda]\subseteq(0,+\infty)$. τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(k,\lambda)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Άσκηση 15/ Να δείξετε ότι η εξίσωση $ημ\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$, $x>0$ έχει μια τουλάχ. θετική ρίζα.

Λύση

Η εξ. γράφεται $2xημ\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow 2xημ\frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$

Αν θέσω $f(x) = 2xημ\frac{1}{x} - 1$.

• Είναι $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(2xημ\frac{1}{x} - 1) = 0 - 1 = -1$.

αφού $|2xημ\frac{1}{x}| = |2x|\cdot|ημ\frac{1}{x}| \le 2x\cdot 1 = 2x$, $x>0$

άρα $-2x \le 2xημ\frac{1}{x} \le 2x$ και αφού $\lim_{x\to0^+}(-2x)=0$

και $\lim_{x\to0^+}(2x)=0$ τότε από κριτήριο Παρεμβολής

και $\lim_{x\to0^+}(2xημ\frac{1}{x}) = 0$. Αφού $\lim_{x\to0^+} f(x) = -1<0$ τότε υπάρχει $\alpha>0$ ώστε $f(\alpha)<0$

• Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2xημ\frac{1}{x} - 1) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 1\right)$

(Θέτω $y=\frac{1}{x}$) $= \lim_{y\to0}\left(\frac{2ημy}{y} - 1\right) = 2\cdot1 - 1 = 2>0$

Άρα υπάρχει αριθμός $\beta>0$ κοντά σε μια περιοχή του $+\infty$ ώστε $f(\beta)>0$.
Άρα $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. και η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα και στο $[\alpha,\beta]$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.

12η μορφή Πρόσημο συνάρτησης

α) $\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \Delta \\ f(x)\neq 0 \\ f(\alpha)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)>0 \ \forall x\in\Delta$

β) $\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \Delta \\ f(x)\neq 0 \ \forall x\in\Delta \\ f(\alpha)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)<0 \ \forall x\in\Delta$

γ) $\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \Delta \\ f(x)\neq 0 \ \forall x\in\Delta \\ f^2(x)=g(x) \\ \text{με } g(x)\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\sqrt{g(x)}$ αν $f(\alpha)>0$ με $\alpha\in\Delta$ | ή $f(x)=-\sqrt{g(x)}$ αν $f(\alpha)<0$ με $\alpha\in\Delta$

Άσκηση 16 Αν $f^2(x)-x^4=2008$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. και $f(0)=-\sqrt{2008}$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

Έστω υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=0$. τότε η (1) για $x=x_0$ γίνεται $f^2(x_0)-x_0^4=2008 \Leftrightarrow 0-x_0^4=2008 \Leftrightarrow x_0^4=-2008$ άτοπο. άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο.
άρα $f^2(x)=x^4+2008 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^4+2008}$ ή $f(x)=-\sqrt{x^4+2008}$
όμως $f(0)=-\sqrt{2008}<0$ άρα $f(x)<0$ άρα

$f(x)=-\sqrt{x^4+2008}$

Άσκηση 17/ Αν $f^2(x) = 2x \cdot f(x) + 4$ για κάθε $x \in R$ και η f συνεχής στο R και $f(0) = 2$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

Έστω υπάρχει $x_0 \in R$ ώστε $f(x_0) = 0$ τότε έχω για $x=$
$f^2(x_0) = 2x_0 f(x_0) + 4 \Leftrightarrow 0 = 0+4 \Leftrightarrow 0 = 4$ άτοπο
άρα είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Και αφού η f συνεχής στο R διατηρεί πρόσημο. Και αφού $f(0) = 2 > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.
Άρα έχω $f^2(x) = 2x f(x) + 4 \Leftrightarrow$
$f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = x^2 + 4 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 4$.
άρα $f(x) - x = \sqrt{x^2+4}$ ή $f(x) - x = -\sqrt{x^2+4}$. αφού η f συνεχής
άρα $f(x) = x + \sqrt{x^2+4} > 0$ ή $f(x) = x - \sqrt{x^2+4} < 0$
Και αφού $f(x) > 0$ τότε $\boxed{f(x) = x + \sqrt{x^2+4}}$ για κάθε $x \in R$.

Άσκηση 18/ Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[-5,5]$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + x^2 = 25$ (1)
α) Να βρείτε τις ρίζες της f.
β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(-5,5)$
γ) Να βρεθεί ο τύπος της f αν $f(0) = -5$

Λύση

α) Έστω $f(x) = 0$. τότε η (1) γίνεται $0^2 + x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$
άρα η f έχει ρίζες $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.
β) Αφού η f έχει διαδοχικές ρίζες τις $-5, 5$ και είναι συνεχής τότε ανάμεσα στις ρίζες διατηρεί πρόσημο δηλαδή $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-5,5)$
γ) Αφού $\left.\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f \text{ συνεχής στο } (-5,5) \\ f(0) = -5 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-5,5)$

Άρα έχω $f^2(x) + x^2 = 25 \Leftrightarrow f^2(x) = 25 - x^2 \Leftrightarrow$
$f(x) = \sqrt{25-x^2}$ ή $f(x) = -\sqrt{25-x^2}$ για κάθε $x \in [-5,5]$
Και αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-5,5)$ και $f(5) = 0$, $f(-5) = 0$
τότε $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, $x \in [-5,5]$.

Ασκήσεις

1) Αν $f(x)=e^{5x}+\ln(ex+1)-4$. Να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(0,1)$.

2) $f(x)=x^{2009}+(\alpha^2+8)x-1$ Να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(0,1)$

3) Να δείξετε ότι η εξίσωση $5x-\ln x^{12}=3$ έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(1,e)$

4) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^{10}+1}{x-2}=0$ έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(1,2)$.

5) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$ έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(2,3)$.

6) Αν $f^5(x)+4f(x)=2x-1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(0,1)$

7) Αν η f συνεχής στο $[-1,1]$ και ισχύει $0\le f(x)\le 1$ Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^3(x)\cdot\eta\mu(x-1)=x-f(x)$ έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $(-1,1)$

8) Αν η f περιττή και συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$ να δείξετε ότι έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $[-\alpha,\alpha]$.

9) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x=3-2x$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

10) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-2}+\frac{\gamma}{x-3}=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*_+$ έχει δύο τουλάχ. ρίζες στο $(1,3)$.

11) Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $|f(\alpha)-\kappa|+(f(\beta)+\kappa)^2=0$ Να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχ. ρίζα στο $[\alpha,\beta]$

12) Αν η f περιοδική συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο T δηλαδή $f(x+T)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,\frac{T}{2}]$ ώστε $f(x_0+\frac{T}{2})=f(x_0)$.

13) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f^2(x_0)=x_0f(x_0)-3x_0+1$.

14)

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο R

και $f(x) < 1 < 2g(x)$ $\forall x \in R$ και $f(1) = g(2) = 2$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 (1, 2)$ ώστε $\frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{1}{g(x_0)}$

15)

$f(x) = \ln x$, $g(x) = 1/x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1/e, e)$.

16)

Αν η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) + 5x + 4}{x} = 2$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 4}{x^2} = \alpha$, $\alpha > 0$

Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$

17) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x - 2 = x \eta\mu \frac{1}{x}$, $x > 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$

18) Αν $f^2(x) - 4x^2 = 25$ και η f συνεχής στο R και $f(0) = 5$ Να βρεθεί ο τύπος της f.

19) Αν $f^2(x) = 4x f(x) + 25$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = -5$ και η f συνεχής στο R Να βρεθεί ο τύπος της f.

20) Αν f συνεχής στο $[-3, 3]$ και $z = x + i f(x)$ ένας μιγαδικός αριθμός για κάθε $x \in [-3, 3]$ με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με ακτίνα $\rho = 3$ και κέντρο $K(0, 0)$ και $f(0) = -3$.

α) Να δείξετε ότι $x^2 + f^2(x) = 9$

β) Να βρείτε τις ρίζες της f

γ) Να δείξετε ότι η f διατηρεί ~~πρόσ~~ πρόσημο στο $(-3, 3)$

δ) Να βρεθεί ο τύπος της f.