ΜΑΘΗΜΑ 18

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ - ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΠΡΟΣΟΧΗ

1) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $\nu \in N^*$ τότε

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu} = \ell^{\nu}$

β) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = |\ell|$

γ) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell}$ αν $\ell \geq 0$.

2) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

3) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

4) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \ell \neq 0$ τότε δεν ισχύει πάντα ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt[\nu]{\ell}$ γιατί μπορεί να μην υπάρχει το όριο της $f(x)$

5) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \ell \neq 0$ τότε δεν ισχύει πάντα ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\ell$

Υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει το όριο γιατί μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\ell$ ή αντίστροφα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}(f^2(x) - 3x + 2)$

Λύση

$\lim_{x\to 1}(f^2(x) - 3x + 2) = \lim_{x\to 1}(f^2(x)) + \lim_{x\to 1}(-3x+2) =$

$= \left(\lim_{x\to 1} f(x)\right)^2 + \lim_{x\to 1}(-3x+2) = 2^2 + (-1) = 3$.

2) Αν $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ και $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$ Να βρεθεί

το $\lim_{x\to 1} \dfrac{f^3(x) + 2x}{|g(x)| + 4}$.

Λύση.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^3(x)+2x}{|g(x)|+4} = \frac{\lim_{x\to 1}(f^3(x)+2x)}{\lim_{x\to 1}(|g(x)|+4)} = \frac{\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right)^3 + \lim_{x\to 1}(2x)}{\left|\lim_{x\to 1} g(x)\right| + \lim_{x\to 1} 4}$$

$$= \frac{2^3+2}{5+4} = \frac{10}{9}.$$

3) Αν $\lim_{x\to 1}(f(x) - 5x + 3) = 4$ Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1} f(x)$

Λύση

Θέτω $g(x) = f(x) - 5x + 3$ τότε $\lim_{x\to 1} g(x) = 4$.

και $f(x) = g(x) + 5x - 3$

άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(g(x) + 5x - 3) = \lim_{x\to 1} g(x) + \lim_{x\to 1}(5x-3)$

$= 4 + 2 = 6$.

4) Αν $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x^2-1} = 4$ Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1} f(x)$

Λύση

Έστω $g(x) = \dfrac{f(x)-2}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$. τότε

$\lim_{x\to 1} g(x) = 4$ και $f(x) = (x^2-1)\cdot g(x) + 2$.

οπότε $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}[g(x)(x^2-1)+2]$

$= \lim_{x\to1} g(x)\cdot\lim_{x\to1}(x^2-1) + \lim_{x\to1} 2 = 4\cdot0+2 = 2$

5) Αν $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=4$ και $\lim_{x\to2}[g(x)\cdot(x^2-4)]=2$

Να βρεθεί το $\lim_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)]$.

Λύση

• Έστω $\phi(x)=\frac{f(x)}{x-2}$, $x\neq2$ τότε $\lim_{x\to2}\phi(x)=4$

και $f(x)=\phi(x)(x-2)$

• Έστω $h(x)=g(x)(x^2-4)$ τότε $\lim_{x\to2}h(x)=2$

και $g(x)=\frac{h(x)}{x^2-4}$, $x\neq\pm2$

οπότε $\lim_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to2}\left[\phi(x)\cdot(x-2)\cdot\frac{h(x)}{x^2-4}\right]$

$= \lim_{x\to2}\left[\phi(x)\cdot h(x)\cdot\frac{1}{x+2}\right] = \lim_{x\to2}\phi(x)\cdot\lim_{x\to2}h(x)\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$

$= 4\cdot2\cdot\frac{1}{4} = 2$

6) Αν $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$ να υπολογίσετε

το $\lim_{x\to0}\frac{f^2(x)+2xf(x)+x\eta\mu x}{f^2(x)+4x^2+(1-\sigma\upsilon\nu x)x}$

Λύση

Θέτω $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq0$ τότε $\lim_{x\to0}g(x)=2$

και $f(x)=x\cdot g(x)$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)+2xf(x)+x\,ημx}{f^2(x)+4x^2+(1-συνx)x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2g^2(x)+2x^2g(x)+x\,ημx}{x^2g^2(x)+4x^2+(1-συνx)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left[g^2(x)+g(x)+\frac{ημx}{x}\right]}{x^2\left[g^2(x)+4+\frac{1-συνx}{x}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{g^2(x)+g(x)+\frac{ημx}{x}}{g^2(x)+4+\frac{1-συνx}{x}}$$

$$=\frac{[\lim_{x\to 0}g(x)]^2+\lim_{x\to 0}g(x)+\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}}{[\lim_{x\to 0}g(x)]^2+\lim_{x\to 0}4+\lim\frac{1-συνx}{x}}=\frac{2^2+2+1}{2^2+4+0}=\frac{7}{8}$$

$\boxed{7}$ 905 Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=2$ να υπολογίσετε:

α) $\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-4f(x)+3}{x^2-1}$ β) $\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-9}{\sqrt{f(x)+1}-2}$

γ) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+4x-7}{x-1}$

Λύση

Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-3}{x-1}$, $x\neq 1$ τότε $\lim_{x\to 1}g(x)=2$

και $f(x)=g(x)(x-1)+3$ οπότε

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}[g(x)(x-1)+3]=\lim_{x\to 1}g(x)\cdot\lim_{x\to 1}(x-1)+3$$

$$=2\cdot 0+3=3$$

άρα

α)

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-4f(x)+3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-3)(f(x)-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}\cdot\frac{\lim_{x\to 1}(f(x)-1)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}$$

$$=2\cdot\frac{3-1}{1+1}=2\cdot 1=2$$

β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x)-9}{\sqrt{f(x)+1}-2}$ θέτω $y=f(x)$

τότε $y \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

οπότε $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x)-9}{\sqrt{f(x)+1}-2} = \lim\limits_{y\to 3} \dfrac{y^2-9}{\sqrt{y+1}-2} =$

$$\lim_{y\to 3} \frac{(y-3)(y+3)(\sqrt{y+1}+2)}{(\sqrt{y+1}-2)(\sqrt{y+1}+2)} = \lim_{y\to 3} \frac{(y-3)(y+3)(\sqrt{y+1}+2)}{\sqrt{y+1}^2-4}$$

$$= \lim_{y\to 3} \frac{(y-3)(y+3)(\sqrt{y+1}+2)}{y-3} = \lim_{y\to 3}\left[(y+3)(\sqrt{y+1}+2)\right]$$

$$= (3+3)(\sqrt{3+1}+2) = 24.$$

γ) $$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)+4x-7}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{[g(x)(x-1)+3]+4x-7}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{g(x)(x-1)+4x-4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)(x-1)+4(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(g(x)+4)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(g(x)+4) = \lim_{x\to 1} g(x)+4$$

$$= 2+4 = 6.$$

(8) Αν $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-\beta x+6}{x^2-4} = -\dfrac{1}{4}$ Να βρεθεί η τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θέτω $g(x) = \dfrac{x^2-\beta x+6}{x^2-4}$, $x \neq 2$, $x \neq -2$ τότε

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -\dfrac{1}{4}$ και $g(x)(x^2-4) = x^2-\beta x+6$.

οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\cdot(x^2-4)\right] = \lim\limits_{x\to 2}(x^2-\beta x+6)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot 0 = 4-2\beta+6 \Leftrightarrow \beta = 5.$$

Επαλήθευση για $\beta=5$ είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}$$

ισχύει άρα $\beta=5$

Προσοχή η Επαλήθευση είναι υποχρεωτική

(9) Αν $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x-1}=4$ να βρεθούν οι τιμές των $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $g(x)=\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x-1}$, $x\neq 1$ τότε:

$\lim_{x\to 1}g(x)=4$ και $g(x)\cdot(x-1)=x^2+\beta x+\gamma$.

οπότε $\lim_{x\to 1}[g(x)(x-1)]=\lim_{x\to 1}(x^2+\beta x+\gamma)$

$\Leftrightarrow 4\cdot 0=1+\beta+\gamma \Leftrightarrow \gamma=-\beta-1$

τότε $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x-1}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+\beta x-\beta-1}{x-1}=4$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+\beta(x-1)}{x-1}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+\beta)}{(x-1)}=4$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}(x+1+\beta)=4 \Leftrightarrow 2+\beta=4 \Leftrightarrow \beta=2$

οπότε και $\gamma=-3$

Επαλήθευση για $\beta=2$ και $\gamma=-3$ έχω:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$$

$=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$ αληθεύει άρα $\beta=2,\gamma=-3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Αν $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ Να υπολογίσετε.

α) $\lim_{x\to 1} \frac{f^3(x)+2x+1}{|f(x)|+2}$. β) $\lim_{x\to 1} [f^2(x)+\sqrt{2f(x)}+x]$

2) Αν $\lim_{x\to 2} [f(x)-3x+5] = 4$ Να υπολογίσετε

α) $\lim_{x\to 2} f(x)$ β) $\lim_{x\to 2} \frac{|f(x)-5|+2f(x)-10}{f(x)-5}$

3) Αν $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ και $\lim_{x\to 1} [g(x)(x^3-1)] = 4$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1} [f(x)\cdot g(x)]$

4) Αν $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 4$ Να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} f(x)$

5) Αν $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ Να υπολογίσετε.

α) $\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)+2x\,\eta\mu x+5x f(x)}{f^2(x)+4x f(x)}$

6) Αν $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 4$ Να υπολογίσετε.

α) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{f(x)+2}-2}{f(x)-2}$ β) $\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)+3x-13}{x^2-9}$.

γ) $\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x)-4}{x-3}$.

7) Αν $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-\beta x+\gamma}{x-2} = 5$ Να υπολογίσετε τα $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

8) Αν $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ Να βρεθεί $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{x+8}{x+4}\right)$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 4\sigma\upsilon\nu x+3}{\sigma\upsilon\nu^2 x-1}$;

ΜΑΘΗΜΑ 19.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ - ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ.

1) Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ τότε θα είναι και $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. (ιδιοτ. ορίων 9)

2) Ισχύουν $|\eta\mu x| \leq 1$, $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$, $|\eta\mu x| \leq |x|$.

3) $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $(g(x) > 0)$

4) $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow -|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|$.

5) $f^2(x) \leq g^2(x) \Leftrightarrow |f(x)|^2 \leq |g(x)|^2 \Leftrightarrow$
$|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow -|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|$.

6) Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και οι f, g έχουν όριο στο x_0 τότε, $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$ (ιδιοτ. ορίων 8).

7) Αν $|f(x)| \leq |g(x)|$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Απόδειξη.

$|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow -|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|$

Είναι $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = |\lim_{x \to x_0} g(x)| = 0$.
και $\lim(-|g(x)|) = -|\lim_{x \to x_0} g(x)| = 0$.

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Λύμένες ασκήσεις.

① Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $x\eta\mu 3x \le x^2 f(x) \le x^3 + 3x^2$.
Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} f(x)$

Λύση

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε: $\frac{x\eta\mu 3x}{x^2} \le \frac{x^2 f(x)}{x^2} \le \frac{x^3+3x^2}{x^2}$.

$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu 3x}{x} \le f(x) \le x+3.$

Είναι • $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$

• $\lim_{x\to 0} (x+3) = 3.$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$

② Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $\eta\mu 5x \le x f(x) \le x^2 + 5x$
Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} f(x)$

Λύση.

• για κάθε $x>0$ έχουμε $\frac{\eta\mu 5x}{x} \le f(x) \le x+5.$

Είναι $\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu 5x}{x} = 5 \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$

και $\lim_{x\to 0^+} (x+5) = 5$

οπότε και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 5$ ①

• για κάθε $x<0$ έχουμε $\frac{\eta\mu 5x}{x} \ge f(x) \ge x+5$

Είναι $\lim_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu 5x}{x} = 5\lim_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$

και $\lim_{x\to 0^-} (x+5) = 5$

οπότε και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 5$ ②

Από ①, ② έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = 5$

(3) Αν $2\sqrt{2x} \le f(x) \le x+2$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

Να υπολογίσετε α) $\lim_{x\to 2} f(x)$ β) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-4}{x-2}$

γ) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-2x}{x-2}$ δ) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-x^2}{x-2}$

ε) $\lim_{x\to 2} \frac{2f^2(x)-32}{3x-6}$ στ) $\lim_{x\to 2} \frac{|f(x)|-4}{x-2}$

Λύση

α) Είναι $\lim_{x\to 2}(2\cdot\sqrt{2x}) = 4$ και $\lim_{x\to 2}(x+2) = 4$ άρα, από κριτ. παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

β) Είναι $2\sqrt{2x} \le f(x) \le x+2 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{2x}-4 \le f(x)-4 \le x-2$ (1)

• για κάθε $x>2$ έχουμε $\frac{2\sqrt{2x}-4}{x-2} \le \frac{f(x)-4}{x-2} \le 1$.

Είναι $\lim_{x\to 2^+} \frac{2\sqrt{2x}-4}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(2\sqrt{2x}-4)(2\sqrt{2x}+4)}{(x-2)(2\sqrt{2x}+4)} =$

$= \lim_{x\to 2^+} \frac{8x-16}{(x-2)(2\sqrt{2x}+4)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{8(x-2)}{(x-2)(2\sqrt{2x}+4)}$

$= \lim_{x\to 2^+} \frac{8}{2\sqrt{2x}+4} = 1$

και $\lim_{x\to 2^+}(1) = 1$ οπότε και $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-4}{x-2} = 1$ (1)

• για κάθε $x<2$ έχουμε $\frac{2\sqrt{2x}-4}{x-2} \ge \frac{f(x)-4}{x-2} \ge 1$

Είναι $\lim_{x\to 2^-} \frac{2\sqrt{2x}-4}{x-2} = 1$ και $\lim_{x\to 2}(1) = 1$

οπότε $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-4}{x-2} = 1$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-4}{x-2} = 1$

γ) Από το β έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=1$

Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-4}{x-2}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=1$

και $f(x)=g(x)\cdot(x-2)+4$ (3)

άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}[g(x)(x-2)+4]=1\cdot 0+4=4.$

άρα $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)+4-2x}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)-2(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)[g(x)-2]}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}[g(x)-2]=1-2=-1.$

δ) Με τη βοήθεια της σχέσης (3) στο γ έχω:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-x^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)+4-x^2}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)-(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}[g(x)-(x+2)]$

$=1-4=-3.$

ε) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f^2(x)-32}{3x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(f(x)-4)(f(x)+4)}{3(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-4}{x-2}\cdot\frac{2(f(x)+4)}{3}\right].$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(f(x)+4)}{3}\overset{β}{=}1\cdot\frac{2(4+4)}{3}=\frac{16}{3}$

στ) αφού $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο 2 άρα $|f(x)|=f(x)$

άρα $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|f(x)|-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=1$

④ Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει
$(f(x)-5)^2 \leq g^2(x) \cdot (x-1)^{2008}$ και $\lim_{x\to 1} g(x) = \ell \in R$
Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

Λύση.

Είναι $(f(x)-5)^2 \leq g^2(x)(x-1)^{2008} \Leftrightarrow$

$|f(x)-5|^2 \leq |g(x)(x-1)^{1004}|^2 \Leftrightarrow$

$|f(x)-5| \leq |g(x)|(x-1)^{1004} \Leftrightarrow$

$-|g(x)|(x-1)^{1004} \leq f(x)-5 \leq |g(x)|(x-1)^{1004}$

$5-|g(x)|(x-1)^{1004} \leq f(x) \leq 5-|g(x)|(x-1)^{1004}$

Είναι $\lim_{x\to 1}\left[5-|g(x)|(x-1)^{1004}\right] = 5-\ell\cdot 0 = 5$.

και $\lim_{x\to 1}\left[5+|g(x)|(x-1)^{1004}\right] = 5+\ell\cdot 0 = 5$

άρα και $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$

⑤ Αν $f^2(x)-4f(x) \leq x^2+2x\eta\mu x+\eta\mu^2 x-4$, $x \in R$
Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} f(x)$

Λύση.

Είναι $f^2(x)-4f(x)+4 \leq x^2+2x\eta\mu x+\eta\mu^2 x$. $\Leftrightarrow$

$(f(x)-2)^2 \leq (x+\eta\mu x)^2 \Leftrightarrow$

$|f(x)-2|^2 \leq (x+\eta\mu x)^2 \Leftrightarrow |f(x)-2| \leq |x+\eta\mu x|$. $\Leftrightarrow$

$-|x+\eta\mu x| \leq f(x)-2 \leq |x+\eta\mu x| \Leftrightarrow 2-|x+\eta\mu x| \leq f(x) \leq 2+|x+\eta\mu x|$

αφού $\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}[2-|x+\eta\mu x|] = 2-0 = 2\\ \text{και } &\lim_{x\to 0}[2+|x+\eta\mu x|] = 2+0 = 2\end{aligned}\right\}$ τότε και $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

6) Με το κριτήριο Παρεμβολής υπολογίζονται όρια της μορφής

$\boxed{\alpha)\ \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot \eta\mu\, g(x)] \quad \beta)\ \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu\, g(x)]}$

όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και το $g(x)$ δεν ορίζεται για x_0.

τότε το όριο είναι πάντα 0.

και η λύση γίνεται όπως στο πχ. α)

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-2}{x}\cdot \eta\mu\frac{3}{x-2}\right]$ και το $\frac{3}{x-2}$ δεν ορίζ. στο 2

Λύση

Παρατηρώ ότι $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x}=0$ άρα θα λυθεί με τη βοήθεια του κριτηρ. παρεμβολής.

Αρκεί να θυμηθώ ότι $|\eta\mu x|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\left|\frac{x-2}{x}\cdot\eta\mu\frac{3}{x-2}\right| = \left|\frac{x-2}{x}\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{3}{x-2}\right| \le \left|\frac{x-2}{x}\right|\cdot 1 = \left|\frac{x-2}{x}\right|$

άρα $\left|\frac{x-2}{x}\cdot\eta\mu\frac{3}{x-2}\right| \le \left|\frac{x-2}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{x-2}{x}\right| \le \frac{x-2}{x}\eta\mu\frac{3}{x-2} \le \left|\frac{x-2}{x}\right|$

αφού $\lim_{x\to 2}\left|\frac{x-2}{x}\right| = 0$ και $\lim_{x\to 2}\left[-\left|\frac{x-2}{x}\right|\right]=0$.

τότε και $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-2}{x}\cdot\eta\mu\frac{3}{x-2}\right]=0$.

Αν όμως ορίζεται η $g(x)$ για x_0 τότε, η λύση γίνεται με τη βοήθεια των ιδιοτήτων όπως στο πχ β) ή όπως στο (πχ α)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to}\left[\frac{x-1}{x^2}\eta\mu 3x\right]$

Λύση

$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{x}\cdot\eta\mu 3x\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 1}(\eta\mu 3x) = 0\cdot\eta\mu 3 = 0$

ή όπως στο α)

(7) Να υπολογ. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}\right]$

Λύση

Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)=0$ και $\frac{2}{x}$ δεν ορίζ. στο 0 άρα κριτήριο παρεμβολής.

Είναι $\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}\right|=\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}\right|\le\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|\cdot 1=\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|$

άρα $\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}\right|\le\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right| \Leftrightarrow -\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|\le\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}\le\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|$.

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right|\right]=0$ τότε

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}\right)=0$

(8) Αν $x\cdot f(x)\le x^2+3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f έχει όριο στο 0 να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Λύση

Έστω $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\ell$.

- για $x>0$ η ανισότητα γίνεται $f(x)\le x+3$.
  άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\le\lim\limits_{x\to 0^+}(x+3) \Leftrightarrow \ell\le 3$ (1)

- για $x<0$ η ανισότητα γίνεται $f(x)\ge x+3$
  άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\ge\lim\limits_{x\to 0^-}(x+3) \Leftrightarrow \ell\ge 3$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $\ell=3$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $x\,ημ2x \le x^2 f(x) - 5x^2 \le x^3 + 2x^2$
Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} f(x)$

2) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $ημ3x \le x\,f(x) \le x^4 + 3x$
Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} f(x)$

3) $2\sqrt{5x} \le f(x) \le x + 5$ για κάθε $x \in R$.
Να υπολογίσετε τα όρια.
α) $\lim_{x \to 5} f(x)$ β) $\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - 10}{x - 5}$ γ) $\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - 2x}{x - 5}$
δ) $\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - x^2 + 15}{x - 5}$ ε) $\lim_{x \to 5} \frac{f^2(x) - 100}{2x - 10}$

4) Αν $(f(x) - 2)^2 \le x^2 - 2x + 1$ για κάθε $x \in R$
Να δείξετε ότι $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

5) Αν $f^2(x) - 6f(x) + 9 \le x^2 + 4ημx + 4ημ^2x$.
για κάθε $x \in R$ να δείξετε $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$.

6) Να βρεθούν τα όρια.
α) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x-3}{x^2} \cdot ημ\frac{2}{x-3} \right)$ β) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{4} \cdot συν\frac{2}{x} \right)$

7) Να βρεθούν τα όρια.
α) $\lim_{x \to 0} (x^2 + 2x)ημx$ β) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x^2+1} \cdot συνx \right)$

8) Αν $x \cdot f(x) \le 2x + 1 - συνx$ για κάθε $x \in R$
και η f έχει όριο στο 0
Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} f(x)$