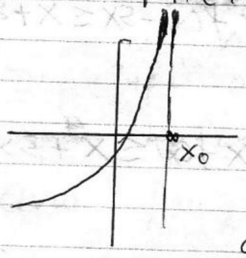
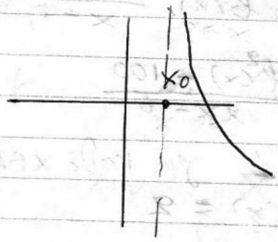
14ε

ΜΑΘΗΜΑ 20

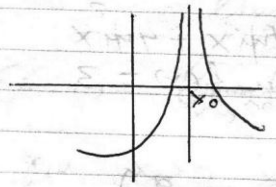
ΑΠΕΙΡΑ ΟΡΙΑ. (Ι)



Π. ορισμού της f είναι $A=(-\infty, x_0)$
Παρατηρώ ότι καθώς το x πλησιάζει κοντά στο x_0 από αριστερά οι τιμές της f μεγαλώνουν συνεχώς,
σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το όριο της f είναι το $+\infty$.
και γράφουμε $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

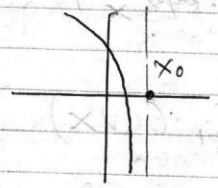


Π. ορισμού της f είναι $A=(x_0, +\infty)$
Είναι $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$
ή $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

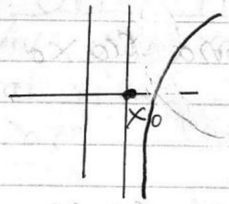


Π. ορισμού της f είναι $A=(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$

Είναι $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ άρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

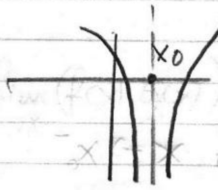


Π. ορ της f είναι $A=(-\infty, x_0)$
Παρατηρώ ότι καθώς το x πλησιάζει κοντά στο x_0 από αριστερά τότε οι τιμές της f μικραίνουν συνεχώς.
Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το όριο της f είναι το $-\infty$
και γράφουμε $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ ή
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



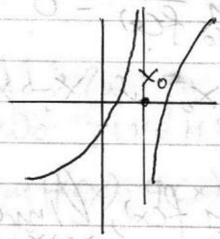
Π. ορ. της f είναι $A=(x_0,+\infty)$

είναι $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$



Π. ορ. της f είναι $A=(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$

$$\text{Είναι } \left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \\ &\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \text{ άρα } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$



$$\text{Είναι } \left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \text{ δεν υπάρχει το } \lim_{x\to x_0} f(x)$$

<u>Προσοχή</u> Το $+\infty$ και το $-\infty$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά καταστάσεις.
το $+\infty$ σημαίνει ότι οι τιμές μεγαλώνουν συνεχώς
το $-\infty$ σημαίνει ότι οι τιμές μικραίνουν συνεχώς

<u>Προσοχή</u> Για να μπορεί να έχει μια συνάρτηση άπειρο όριο στο x_0 πρέπει το x_0 να μην είναι στο Π. ορισμού της και το Π. ορ. να περιέχει διάστημα της μορφής (α,x_0) ή (x_0,β) ή $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$

<u>Προσοχή</u> Άπειρο όριο μπορεί να έχουν οι συναρτήσεις των οποίων μηδενίζεται ο παρονομαστής χωρίς να μηδενίζεται ο αριθμητής. στα θέσω όπου x το x_0

Ισχύουν τα εξής

1) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

2) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

τότε $\lim \frac{1}{f(x)} = -\infty$

3) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

4) Τα ίδια ισχύουν αν $x \to x_0^+$ ή $x \to x_0^-$

5) Όριο αθροίσματος

Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$

και είναι πραγματικοί αριθμοί ή άπειρα

τότε για το $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$ ισχύει.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = \begin{cases} \bullet\ +\infty + (+\infty) = +\infty \\ \bullet\ -\infty + (-\infty) = -\infty \\ \bullet\ +\infty + (-\infty) \text{ Απροσδιόριστο} \\ \text{*(αλλάζω τη μορφή της συνάρτ.)} \\ \bullet\ +\infty + \ell = +\infty \\ \bullet\ +\infty + (-\ell) = +\infty \\ \bullet\ -\infty \pm \ell = -\infty \end{cases}$$

* κάνω ομώνυμα. Αν είναι κλάσματα ή βγάζω κοινό παράγοντα

6) ΟΡΙΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί ή άπειρα τότε ισχύουν

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = \begin{cases} (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty \\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty \\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty \\ (+\infty)\cdot(\ell>0) = +\infty \\ (+\infty)\cdot(\ell<0) = -\infty \\ (-\infty)\cdot(\ell>0) = -\infty \\ (-\infty)\cdot(\ell<0) = +\infty \end{cases}$$

· $(\pm\infty)\cdot 0$ Απροσδιόριστη

(Αλλάζω τη μορφή της συνάρτησης από γινόμενο σε πηλίκο.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{ κτλ}$$

ή $$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \text{ κτλ.}$$

και προσπαθώ με διάφορους άλλους τρόπους παραγοντοποίησης ή κανόνες De L'Hospital που θα μάθουμε αργότερα να βρούμε το όριο.

7) ΟΡΙΟ ΠΗΛΙΚΟΥ.

Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τότε ισχύουν

i) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\alpha\neq 0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) =$$

και εφαρμόζω τους κανόνες του γινομένου

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{\pm\infty}\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right) =$
$= 0 \cdot 0 = 0$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{\pm\infty}{0}\right) = \lim\left(f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right) =$
$=$ κανόνες γινομένου.

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ αόριστη μορφή
(κάνουμε παραγοντοποίηση ή κανόνες DE L'HOSPITAL όπως θα μάθουμε αργότερα)

8) αν $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

8) αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

9) αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \pm\infty$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

10) αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = +\infty$

11) αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)}$ δεν υπάρχει

12) αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

13) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = +\infty$.

14) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{αν ν άρτ} \\ -\infty & \text{αν ν περιτ} \end{cases}$

15) • Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

• Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ αφού $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ κοντά στο 0

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ αφού $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ και $|x| > 0$ κοντά στο 0.

3) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$ αφού $\lim_{x\to 2}(x-2)^4 = 0$ και $(x-2)^4 > 0$ κοντά στο 2

4) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{|x-3|} = +\infty$ αφού $\lim_{x\to 3} |x-3| = 0$ και $|x-3| > 0$ κοντά στο 3

5) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Λύση

Επειδή $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ αλλά το x^3 δεν είναι είναι πάντα θετικό ή αρνητικό καθώς το x πλησιάζει στο 0.

Τότε ΠΑΙΡΝΩ ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ.

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ αφού $\lim_{x\to 0^+} x^3 = 0$ και $x^3 > 0$ όταν $x \to 0^+$ $(x>0)$

• $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim \frac{1}{x^3} = -\infty$ αφού $\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0$ και $x^3 < 0$ όταν $x \to 0^-$ $(x<0)$

άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$

6) Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$

λύση

Αφού $\lim_{x\to 0} (x-2) = 0$ και το $x-2$ δεν διατηρεί πρόσημο κοντά στο 2 τότε παίρνω πλευρικά όρια.

• $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ αφού $x-2 > 0$ όταν $x \to 2^+$ $(x>2)$

• $\lim_{x\to} \frac{1}{x-2} = -\infty$ αφού $x-2 < 0$ όταν $x \to 2^-$ $x<0$

άρα δεν υπάρχει $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$

7) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{|x-3|} = +\infty$. αφού $\lim_{x\to 3} |x-3| = 0$ και $|x-3| > 0$.

8) $\lim_{x\to 1} \frac{-2}{(x-1)^4} = -2 \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} =$
$= -2 \cdot (+\infty) = -\infty$.

9) Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim_{x\to 2} \frac{7}{(2-x)^3}$

Λύση

αφού $\lim_{x\to 2}(2-x)^3=0$ και το $(2-x)^3$ δεν διατηρεί πρόσημο κοντά στο 2, παίρνω πλευρικά όρια.

- $\lim_{x\to 2^+}\frac{7}{(2-x)^3} = 7\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(2-x)^3} = 7\cdot(-\infty) = -\infty$ αφού $(2-x)^3<0$ όταν $x\to 2^+$ $(x>2)$.

- $\lim_{x\to 2^-}\frac{7}{(2-x)^3} = 7\cdot\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(2-x)^3} = 7\cdot(+\infty) = +\infty$ αφού $(2-x)^3>0$ όταν $x\to 2^-$ $(x<2)$

άρα δεν υπάρχει $\lim_{x\to 2^+}\frac{7}{(x-2)^3}$

(10) $f(x) = \frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = ;$

Λύση

Είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right) = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$

(11) $f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = ;$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ενώ υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$.

ΔΕΝ ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΕΦΑΡΜΟΣΩ ΤΟΝ ΚΑΝΟΝΑ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ. ΑΡΑ αλλάζω τη μορφή της συνάρτησης. $f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$

οπότε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{x^2}\right]$

$= 1\cdot(+\infty) = +\infty$.

(11) $\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu 3x + \frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}(\eta\mu 3x) + 5\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

$= 0 + 5\cdot(+\infty) = +\infty$

(12) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2}\right) = ;$ $\left(\pi\varepsilon\rho.\ (+\infty)-(+\infty)\right)$

· αν $x>0$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = (-1)\cdot(+\infty) = -\infty.$

· αν $x<0$

$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-x-1}{x^2}\right)$

$= \lim_{x\to 0^-}\left[(-x-1)\frac{1}{x^2}\right] = -1(+\infty) = -\infty.$

άρα $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$

(13) $f(x) = \frac{3x^2-10}{x^2-1}$ Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim_{x\to 1} f(x)$ $\left(\frac{\alpha}{0}\right)$

αφού $\lim_{x\to 1}(3x^2-10) = -7 \neq 0$ και $\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$

και το x^2-1 δεν διατηρεί πρόσημο κοντά στο 1 παίρνω πλευρικά όρια.

· $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{3x^2-10}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2-10}{(x-1)(x+1)} =$

$= \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}\cdot\frac{3x^2-10}{x+1}\right] = +\infty\cdot\left(\frac{-7}{2}\right) = +\infty$

$\cdot \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{3x^2-10}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{x-1}\cdot\frac{3x^2-10}{x+1}\right]$

$= -\infty \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\infty$.

Δεν υπάρχει $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(14) $f(x) = \frac{2x^3-5}{(x-2)^2}$ Να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} f(x)$

$\left(\frac{\alpha}{0}\right)$

Λύση

αφού $\lim_{x\to 2}(2x^3-5) = 11 \neq 0$ και $\lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$ και

$(x-2)^2 > 0$ κοντά στο 2, τότε.

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{2x^3-5}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\cdot(2x^3-5)\right]$

$= +\infty \cdot 11 = +\infty$.

(15) $f(x) = \frac{x^2+x-5}{\sqrt{x-2}}$ $\lim_{x\to 2} f(x) = ;$

Π. ορ. της f είναι $A = [2, +\infty)$

άρα $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot(x^2+x-5)\right)$

$= +\infty \cdot 1 = +\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5}{(3-x)^2}$ ii) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{-2}{|x-5|}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4}{(x-1)^5}$

② $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \dfrac{2}{x^4}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

③ $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

④ $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

⑤ $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x^2-4}$. Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

⑥ $f(x) = \dfrac{2x^3-7}{|x-1|}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

⑦ $f(x) = \dfrac{x^2-5x+3}{(x-1)^2}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

⑧ $f(x) = \dfrac{x^3-5}{x^2-4x+4}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

⑨ $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3-3x+2}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

⑩ $f(x) = \dfrac{4x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2-3x+2}$ Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

⑪ $f(x) = \dfrac{5x+3}{\sqrt{x-1}}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ΜΑΘΗΜΑ 21
ΑΠΕΙΡΑ ΟΡΙΑ (ΙΙ)

Άσκηση 1) $f(x)=\dfrac{3x^2+5}{εφx}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση

Είναι $\left(\dfrac{α}{0}\right)$ και αφού ο παρονομαστής δεν διατηρεί πρόσημο παίρνω πλευρικά όρια.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$εφx$	‖	$-$	0	$+$	‖

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{εφx}\cdot(3x^2+5)\right]=+\infty\cdot 5=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\left[\dfrac{1}{εφx}\cdot(3x^2+5)\right]=-\infty\cdot 5=-\infty$.

άρα δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Άσκηση 2) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x\cdot εφx}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Λύση. Είναι $\left(\dfrac{α}{0}\right)$ άρα.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{εφx}\cdot(x^2+2)\right]=+\infty\cdot(+\infty)\cdot 2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{εφx}\cdot(x^2+2)\right]=(-\infty)(-\infty)\cdot 2=+\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

Άσκηση 3) $f(x)=\dfrac{4+εφx}{1-συνx}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Λύση. Είναι $\left(\dfrac{4}{0}\right)$

Όμως $-1\le συνx\le 1$ άρα $1-συνx\geq 0$ για κάθε x.

Επομένως.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{1-συνx}\cdot(4+εφx)\right]=+\infty\cdot 4=+\infty$

Άσκηση 4/ $f(x)=\dfrac{|x^2-5|+2|x^2-4|+1}{x-2}$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Λύση

Είναι $\left(\frac{\alpha}{0}\right)$ και αφού ο παρονομαστής δεν διατηρεί πρόσημο κοντά στο 2 παίρνω πλευρικά όρια.

Είναι $\lim_{x\to 2}(x^2-5)=-1<0$ άρα και $x^2-5<0$ κοντά στο 2, άρα $|x^2-5|=-x^2+5$

Είναι

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

άρα • $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+5+2(x^2-4)+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}\cdot(x^2-2)\right]=+\infty\cdot 1=+\infty$

• $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+5-2(x^2-4)+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{-3x^2+14}{x-2}=$

$=\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x-2}\cdot(-3x^2+14)\right]=-\infty\cdot 2=-\infty$

άρα δεν υπάρχει $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Άσκηση 5/ $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda}{x-2}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim_{x\to 2} f(x)$

Λύση

Είναι $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ και $\lim_{x\to 2}(x^2-\lambda)=4-\lambda$.

α) Αν $\lambda=4$ τότε έχω απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$ οπότε

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

β) Αν $\lambda\neq 4$ τότε έχω απροσδιοριστία $\left(\frac{\alpha}{0}\right)$ και αφού ο παρονομαστής δεν διατηρεί πρόσημο παίρνω πλευρ. όρια.

• $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-\lambda}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\cdot(x^2-\lambda)\right) =$

$= +\infty\,(4-\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } 4-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<4 \\ -\infty & \text{αν } 4-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>4 \end{cases}$

• $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\cdot(x^2-\lambda)\right) =$

$= -\infty\,(4-\lambda) = \begin{cases} -\infty & \text{αν } \lambda<4 \\ +\infty & \text{αν } \lambda>4 \end{cases}$

άρα δεν υπάρχει $\lim_{x\to 2} f(x)$

Άσκηση 6/ $f(x) = \frac{x^2-\lambda x+\lambda}{|x-2|}$

Να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

Λύση

Είναι $\lim_{x\to 2}|x-2| = 0$ και $\lim_{x\to 2}(x^2-\lambda x+\lambda) = 4-\lambda$

α) αν $\lambda=4$ τότε έχω περίπτωση $\left(\frac{0}{0}\right)$

άρα για $\lambda=4$ έχω $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{|x-2|} = \frac{(x-2)^2}{|x-2|} =$

$= \frac{|x-2|^2}{|x-2|} = |x-2|.$

οπότε $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}|x-2| = 0$

β) αν $\lambda\neq 4$ τότε έχω περίπτωση $\left(\frac{\alpha}{0}\right)$

οπότε

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{|x-2|}\cdot(x^2-\lambda x+\lambda)\right) =$

$= +\infty\cdot(4-\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } 4-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<4 \\ -\infty & \text{αν } 4-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>4 \end{cases}$

Άσκηση 7/ $f(x)=\dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x-2}$

Να βρεθούν τα $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\beta x+\gamma)=4+2\beta+\gamma$

α) αν $4+2\beta+\gamma\neq 0$ τότε έχω περίπτωση $\left(\frac{\alpha}{0}\right)$ οπότε το όριο της $f(x)$ δεν είναι πραγματικός αλλά $(\pm\infty)$

β) αν $4+2\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=-2\beta-4$ τότε έχω

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\beta x-2\beta-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)+\beta(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+\beta)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2+\beta)=4+\beta$$

Πρέπει $\left.\begin{array}{l}4+\beta=5\\ \text{και } \gamma=-2\beta-4\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\beta=1\\ \gamma=-6.\end{array}$

Άσκηση 8/ Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όταν

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\ell$, $\ell\in\mathbb{R}$, β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(x)}=\ell$, $\ell\neq 0$

Λύση

α) Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, $x\neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\ell$ και $f(x)=(x-1)\cdot g(x)$

τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot g(x)=0\cdot\ell=0$

β) Έστω $g(x)=\dfrac{x-1}{f(x)}$, $x\neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\ell$ και $f(x)=\dfrac{x-1}{g(x)}$ οπότε

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{g(x)}=\dfrac{0}{\ell}=0$

9) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όταν

α) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{f(x)} = +\infty$ β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)(x-1)^2 = +\infty$

Λύση

α) Έστω $g(x) = \frac{x-1}{f(x)}$, $x \neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$

και $f(x) = \frac{x-1}{g(x)}$ οπότε:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \left(\frac{0}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{g(x)}\cdot(x-1)\right] = 0\cdot 0 = 0.$

β) Έστω $g(x) = f(x)(x-1)^2$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$

και $f(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

οπότε $\lim\limits_{x\to 1} \frac{g(x)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\cdot g(x)\right]$

$= +\infty\cdot(+\infty) = +\infty.$

10) Αν $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x) + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = -\infty$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Λύση

Έστω $g(x) = f(x) + \frac{1}{(x-2)^2}$ τότε $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -\infty$

και $f(x) = g(x) - \frac{1}{(x-2)^2}$ με $x \neq 2$.

άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left[g(x) - \frac{1}{(x-2)^2}\right] = (-\infty) - \infty = -\infty$

11) Αν $f(x)\cdot(x-1)^2 \geq x^2+5$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Λύση.

$\forall x \neq 1$ είναι $f(x) \geq \frac{x^2+5}{(x-1)^2}$ άρα και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \geq \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5}{(x-1)^2}$.

όμως $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\cdot(x^2+5)\right] = +\infty\cdot 6 = +\infty$ άρα

και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

(12) Αν $f(x)\cdot(x-2)^2 \le x^2-14 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Λύση.

$\forall x\ne 2$ είναι $f(x)\le \dfrac{x^2-14}{(x-2)^2}$. άρα $\lim\limits_{x\to2} f(x) \le \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-14}{(x-2)^2}$.

Αφού $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-14}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot(x^2-14)\right) = +\infty\cdot(-14) = -\infty$.

τότε και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

(13) $f(x) = \dfrac{3x^2+5}{\eta\mu x - x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ;$

(14) $f(x) = \dfrac{5x^3-4}{\eta\mu x^2 - x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ;$

Λύση 13/. είναι $|\eta\mu x| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le \eta\mu x \le |x|$

για $x>0$ είναι $-x \le \eta\mu x \le x$ άρα $\eta\mu x - x \le 0$

για $x<0$ είναι $x \le \eta\mu x \le -x$ άρα $\eta\mu x - x \ge 0$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\left(\dfrac{1}{\eta\mu x - x}\cdot(3x^2+5)\right) = -\infty\cdot 5 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\left(\dfrac{1}{\eta\mu x - x}\cdot(3x^2+5)\right) = +\infty\cdot 5 = +\infty$

άρα δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση 14/ Αφού $|\eta\mu x| \le |x|$ για $x \to x^2$ έχω

$|\eta\mu x^2| \le |x^2| \Leftrightarrow |\eta\mu x^2| \le x^2 \Leftrightarrow -x^2 \le \eta\mu x^2 \le x^2$

άρα $\eta\mu x^2 - x^2 \le 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\eta\mu x^2 - x^2}\cdot(5x^3-4) = -\infty(-4) = +\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\eta\mu x}{\eta\mu x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2-5}{1-\sigma\upsilon\nu x}$. iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+4x+3}{x^3\eta\mu x}$.

② Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο.

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x^2-3x|+|4x^2-5|}{x^2-4x+4}.$$

③ Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όταν $f(x) = \dfrac{|x^2-x|+|5x^2-6|}{x^2-1}$.

④ $f(x) = \dfrac{x^2-\lambda}{x-3}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

⑤ $f(x) = \dfrac{x^2-2\lambda x+\lambda^2}{|x-3|}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

⑥ $f(x) = \dfrac{x^2-\beta x+\gamma}{x-1}$ να βρεθούν τα $\beta, \gamma \in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$

⑦ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x+\beta-1}{x-1}, & \alpha\nu\ x<1 \\ \dfrac{x^3-1}{x-1}, & \alpha\nu\ x>1. \end{cases}$

Να βρεθούν τα α, β ώστε το όριο της f στο 1 να είναι πραγματικός αριθμός.

⑧ Αν $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2\eta\mu x-1}{f(x)} = +\infty$ να υπολογ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$

⑨ Αν $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{f(x)} = +\infty$ να υπολογ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

⑩ Αν $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\cdot(x^2-6x+9) = -\infty$ να υπολογ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

⑪ Αν $f(x)\,|x-1| \le x^2-5$ να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

⑫ $f(x) = \dfrac{5x^2-10}{x-\eta\mu x}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ;$