Επανάληψη Παραγώγων

1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $8f'(x)=f(x)\left(f^2(x)-4\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{e^x+1}}$.

β) Αν συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g'(x)+f(x)g^2(x)=0$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x\sqrt{2}<\dfrac{1}{g(0)}-\dfrac{1}{g(-x)}<xe^{\frac{x}{2}}f(x)$ για κάθε $x>0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $\sqrt{e^x+1}=2\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

2. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:
$f''(x)=f(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2$ και $f'(0)=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)-f'(x)-1\right)e^x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)-f(x)=-1-2e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της.

ε) Να αποδείξετε ότι $e^{-\alpha}(\alpha-\beta)\le e^{-\beta}-e^{-\alpha}\le e^{-\beta}(\alpha-\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ και $\dfrac{4}{3}$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x(x-1)}>\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^x=\dfrac{4x^2+4x+2}{x^2+2x+2}$.

4. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $6x<f''(x)<12x^2$ για κάθε $x>0$ και $f'(0)=f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $x^3<f(x)<x^4$ για κάθε $x>0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=+\infty$

δ) Η εξίσωση $f(x)=1-e^x$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$.

5. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $2f^3(x)+3f(x)=x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.
στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-5,0).
ζ) Να βρεθεί η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 1$.
η) Να αποδείξετε ότι $9f(x) \le x + 8$ για κάθε $x \ge 1$

6. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,4] \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ για την οποία ισχύει ότι:
$f(2) = 2$, $f'(2) = 0$ και $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = -1$ για κάθε $x \in (0,4)$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,4)$.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$.
γ) Α, Α,Β δύο τυχαία σημεία της γραφικής παράστασης της f, να αποδείξετε ότι $(AB) \le 4$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\beta} > \beta^{\alpha}$ για κάθε $e < \alpha < \beta$.
γ) Να αποδείξετε ότι $x^e \le e^x$ για κάθε $x > 0$.
δ) Αν υπάρχει $\alpha > 0$ για τον οποίο ισχύει ότι $x^e \le \alpha^x$, να αποδείξετε ότι $\alpha \ge e$.

8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$2f(x) - 2x \ge f(2) + f(-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι:
α) $f(2) - f(-2) = 4$
β) υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = f(-2) + 3$.
γ) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2,2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.
δ) υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 1$.
ε) η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες.

9. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x) = \frac{4e^x + 3}{e^x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 4x$.
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 4x$ το πολύ σ΄ένα σημείο.
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.

10. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - 3x}{x - 2} = 1$ και $f(4) = 6$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 6$.
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 3$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2,4)$.

δ) Αν η f είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (2,4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

11. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2}{x-1}=2$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)-4x+3\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)\geq 0$.

12. Εστω πσργωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $h(x)=\ln(f(x))+\dfrac{1}{2}x^2$, $x>0$.

α) Αν για κάθε $x>0$ είναι $h''(x)>1$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Αν $e^6 f(4)=f(2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=-x_0 f(x_0)$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2014$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\ln x)}{x}$.

13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $xf'(x)-2f(x)=2x$ για κάθε $x>0$ και $f(2)=0$.

α) Μα μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$.

β) Να βρείτε την f.

γ) Αν συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f(x)$ και $h(2)=0$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)}{\ln^2(x-1)}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2(\ln x-\lambda)$, $x>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y=-2x+\dfrac{1}{2}$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1,f(1))$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=\dfrac{3}{2}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2014$ ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $(e,+\infty)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2)$, $x>-1$, $\lambda\geq -1$.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Εστω ότι $\lambda=-1$

i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha\neq 0$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{x}{2}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f καθώς και το σημείο τομής τους.

δ) Να προσδιορίσετε τη θέση της C_f ως προς τις ασύμπτωτες.

17. Δίνονται συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)-g'(x)=2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+3)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x+1)=0$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3}{f(x)-2x+1}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,g στο $+\infty$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)-g(x)=2x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\alpha-2)x+9}{x+\beta}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=3$ και $x=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{3x+9}{x+1}$.

β) Να βρείτε συνάρτηση την αρχική συνάρτηση G της f στο διάστημα $(1,+\infty)$, αν η C_G διέρχεται από το σημείο $M(0,3)$.

γ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x)=\frac{G(x)}{x+1}$, $x>-1$.

19. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $2xf(x)+x^2(f'(x)-3)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=\frac{1}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $f\left(\sqrt[50]{50}\right)>f\left(\sqrt[60]{60}\right)$.

γ) Υλικό σημείο κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

20. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2,4]$ με $f'(2)>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστο στο $x_0=2$.

Εστω ότι $f(2)=5$, $f(4)=9$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=7$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_2, x_3 \in (2,4)$ τέτοια, ώστε $f'(x_3)+f'(x_2)=f'(x_3)f'(x_2)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=4-\dfrac{f(x)-1}{x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,4)$.

ε) Αν $f''(x)>0$ για κάθε $x \in (2,4)$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

στ) Αν $f'(x) \le 2$ για κάθε $x \in (2,4)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=2x+1,\ x \in [2,4]$.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης

Λύσεις

1. α) $8f'(x)=f^3(x)-4f(x)\overset{\cdot f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 8f'(x)f(x)=f^4(x)-4f^2(x)\Leftrightarrow$

$$4\cdot 2f(x)f'(x)=f^4(x)-4f^2(x)\overset{:4f^4(x)}{\Leftrightarrow}\frac{2f(x)f'(x)}{f^4(x)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{f^2(x)}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{2f'(x)}{f^3(x)}=\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f^2(x)}\right)'-\frac{1}{f^2(x)}=-\frac{1}{4}\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\frac{1}{f^2(x)}\right)'e^{-x}-e^{-x}\frac{1}{f^2(x)}=-\frac{1}{4}e^{-x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f^2(x)}e^{-x}\right)'=\left(\frac{e^{-x}}{4}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f^2(x)}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{4}+c\overset{x=0}{\Rightarrow}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+c\Leftrightarrow c=\frac{1}{4}\text{ άρα}$$

$$\frac{1}{f^2(x)}e^{-x}=\frac{e^{-x}+1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)}=\frac{1+e^{-x}}{4}\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{4}{1+e^{-x}}$$

Είναι $f(x)\neq 0$ και η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0)=\sqrt{2}$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{e^x+1}}$

β) Είναι $g'(x)=-f(x)g^2(x)\Leftrightarrow-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}=f(x)\Rightarrow\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'=f(x)$

Εστω $\varphi(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ τότε $\varphi'(x)=f(x)$

Από το ΘΜΤ για τη φ στο $[-x,0]$ υπάρχει $\xi\in(-x,0)$:

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(0)-\varphi(-x)}{x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{g(0)}-\frac{1}{g(-x)}\right)$$

όμως $-x<\xi<0\Leftrightarrow e^{-x}<e^{\xi}<1\Leftrightarrow$

$$\sqrt{e^{-x}+1}<\sqrt{e^{\xi}+1}<\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{2}}<\frac{2}{\sqrt{e^{\xi}+1}}<\frac{2}{\sqrt{e^{-x}+1}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}<f(\xi)<\frac{2\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{2}<\frac{1}{x}\left(\frac{1}{g(0)}-\frac{1}{g(-x)}\right)<f(x)\sqrt{e^x}\Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{2}<\frac{1}{g(0)}-\frac{1}{g(-x)}<xf(x)\sqrt{e^x}$$

γ) $\sqrt{e^x+1}=2\lambda\Leftrightarrow\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{2}{\sqrt{e^x+1}}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{\lambda}\ (1)$

Είναι $f'(x)=\left[2\left(e^x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(e^x+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e^x+1\right)'=-\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=(0,2)$

Αν $\dfrac{1}{\lambda}<0\Leftrightarrow\lambda<0$ ή $\dfrac{1}{\lambda}>2\Leftrightarrow 0<\lambda<\dfrac{1}{2}$ τότε η (1) είναι αδύνατη.

Αν $0<\frac{1}{\lambda}<2 \Leftrightarrow \lambda>\frac{1}{2}$, τότε η (1) έχεις ακριβώς μία ρίζα.

2. **α)** $g(x)=\left(f'(x)-f''(x)\right)e^x+\left(f(x)-f'(x)-1\right)e^x=\left(f(x)-f''(x)-1\right)e^x=0 \Leftrightarrow g(x)=c$

β) $g(0)=2 \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=-1-2e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

γ) $f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=-e^{-x}-2e^{-2x} \Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow$
$f(x)e^{-x}=e^{-x}+e^{-2x}+c \Leftrightarrow f(x)=1+e^{-x}+ce^{x}$, $f(0)=2 \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=1+e^{-x}$

δ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ είναι
$-x_1\neq -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}\neq e^{-x_2} \Leftrightarrow 1+e^{-x_1}\neq 1+e^{-x_2} \Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται. $f(x)=y \Leftrightarrow 1+e^{-x}=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-1>0 \Leftrightarrow y>1$.
Τότε $-x=\ln(y-1) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-1)$, άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-1),\ x>1$

ε) Αν $\alpha<\beta$, τότε εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow -e^{-\xi}=\frac{e^{-\beta}-e^{-\alpha}}{\beta-\alpha}$. Είναι:
$\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow -\alpha>-\xi>-\beta \Leftrightarrow e^{-\alpha}>e^{-\xi}>e^{-\beta} \Leftrightarrow -e^{-\alpha}<-e^{-\xi}<-e^{-\beta} \Leftrightarrow$
$-e^{-\alpha}<\frac{e^{-\beta}-e^{-\alpha}}{\beta-\alpha}<-e^{\beta} \Leftrightarrow (\alpha-\beta)e^{-\alpha}<e^{-\beta}-e^{-\alpha}<e^{-\beta}(\alpha-\beta)$
Όμοια αν $\alpha>\beta$.
Αν $\alpha=\beta$, τότε προφανώς ισχύει η ισότητα.

3. **α)** $f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ για κάθε $x\neq 1$ και αφού f συνεχής, είναι $f\uparrow\mathbb{R}$.

β) $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ οπότε $f\left(\sqrt{3}\right)>f\left(\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{4}>\frac{e^{\sqrt{2}}}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}}>\frac{4}{3} \Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}>\frac{4}{3}$

γ) $e^{x^2-x}>\frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x}>\frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+1}>\frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow$
$f\left(x^2\right)>f(x) \Leftrightarrow x^2>x \Leftrightarrow x(x-1)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

δ) $e^x=\frac{4x^2+4x+1+1}{x^2+2x+1+1} \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x+1)}=\frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}}=\frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow$
$\frac{e^{2x+1}}{(2x+1)^2+1}=\frac{e^x+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow f(2x+1)=f(x+1) \Leftrightarrow 2x+1=x+1 \Leftrightarrow x=0$

4. **α)** Εστω $g(x)=f(x)-x^3,\ x\geq 0$.

Είναι $g'(x)=f'(x)-3x^2$, $g''(x)=f''(x)-6x>0 \Rightarrow g' \uparrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x)>g'(0)=0 \Rightarrow g \uparrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0 \Rightarrow f(x)>x^3$. Όμοια για την $h(x)=f(x)-x^4$

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Είναι $g'(x)>g'(0)=0 \Leftrightarrow f'(x)>3x^2$ και $h'(x)<h'(0)=0 \Leftrightarrow f'(x)<4x^3$

Είναι $3x^2<f'(x)<4x^3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

γ) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

Είναι $3\xi^2<f'(\xi)<4\xi^3$ και επειδή $x<\xi<x+1$, όταν $x\to+\infty$ είναι $\xi\to+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\xi^2)=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=+\infty$

δ) Εστω $t(x)=f(x)-1+e^x$, $x\geq 0$. Είναι $t'(x)=f'(x)+e^x>0 \Rightarrow t\uparrow[0,+\infty)$.

Είναι $t(0)=0$ και για $x>0$ είναι $t(x)>t(0)=0$, άρα η $x=0$ είναι μοναδική.

5. α) Είναι $2f^3(x)+3f(x)=x+4$ και για $x=x_0$ είναι $2f^3(x_0)+3f(x_0)=x_0+4$ και με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε: $2f^3(x)-2f^3(x_0)+3f(x)-3f(x_0)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0))(2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3)=x-x_0$

Είναι $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)\geq 0$, αφού $\Delta=-12f^2(x_0)\leq 0$,

άρα $f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}$ (1).

Είναι $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{|2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3|}\leq\dfrac{|x-x_0|}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{|x-x_0|}{3}\leq f(x)-f(x_0)\leq\dfrac{|x-x_0|}{3}$.

Από το ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, άρα f συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

β) $(1)\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{1}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}=\dfrac{1}{6f^2(x_0)+3}$,

άρα $f'(x_0)=\dfrac{1}{6f^2(x_0)+3}$.

γ) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$, τότε $2f^3(x_1)\geq 2f^3(x_2)$ και $2f^3(x_1)+f(x_1)\geq 2f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1+4\geq x_2+4\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και $f\uparrow\mathbb{R}$.

δ) Επειδή η f είναι $\uparrow$ είναι και $1-1$ και αντιστρέφεται. Για $f(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$ είναι

$2y^3+3y=f^{-1}(y)+4 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=2y^3+3y-4$, $y\in\mathbb{R}$.

ε) Επειδή $f\uparrow$, τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην $y=x$, άρα, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=x$. Η σχέση $2f^3(x)+3f(x)=x+4$, γίνεται: $2x^3+3x=x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^3+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow x=1$

Κοινό σημείο το $(1,1)$.

στ) $2f^3(-5)+3f(-5)=-1 \Leftrightarrow f(-5)(2f^2(-5)+3)=-1 \Rightarrow f(-5)<0$

$2f^3(0)+3f(0)=2 \Leftrightarrow f(0)(2f^2(0)+3)=2 \Rightarrow f(0)>0$ και Θ.Β....

ζ) $f^{-1}(1)=1$ και $(f^{-1})'(x)=6x^2+3$, $(f^{-1})'(1)=9$

$\varepsilon: y-f^{-1}(1)=(f^{-1})'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=9x-8$

η) Εστω $g(x)=9f(x)-x-8$, $x\ge 1$. Είναι $g'(x)=9f'(x)-1=\dfrac{6(1-f^2(x))}{6f^2(x)+3}<0$, αφού για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=1$. Άρα $g\downarrow[1,+\infty)$. Για κάθε $x\ge 1$ είναι $g(x)\le g(1)=0$

6. α) Είναι $(f'(x))^2+f(x)f''(x)=-1 \Leftrightarrow f(x)f''(x)=-1-(f'(x))^2<0 \Rightarrow f''(x)\neq 0$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f' είναι 1-1.

Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,4]$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)$, τότε λόγω του Θ.Rolle για την f', υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ή στο (x_2,x_1) τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x_1)\neq f'(x_2)$, οπότε η f' είναι 1-1. Επειδή η f' είναι συνεχής και 1-1, είναι γνησίως μονότονη (θέλει απόδειξη).

Αν $f'\nearrow[0,4]$ τότε για κάθε $0<x<2 \Rightarrow f'(x)<f'(2)=0 \Rightarrow f\searrow[0,2]$, άρα $f(x)>f(2)=2>0$

Για κάθε $2<x<4 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(2)=0 \Rightarrow f\uparrow[2,4]$, άρα $f(x)>f(2)=2>0$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,4)$ που είναι άτοπο γιατί $f''(x)\cdot f(x)>0$.

Οπότε $f''(x)<0$ άρα $f(x)>0$.

β) Είναι $(f'(x)f(x))'=(-x)' \Leftrightarrow f'(x)f(x)=-x+c_1 \overset{x=2}{\Rightarrow} c_1=2$

Άρα $2f'(x)f(x)=-2x+4 \Rightarrow (f^2(x))'=(4-x^2)' \Leftrightarrow f^2(x)=4x-x^2+c_2$

Για $x=2$ $c_2=0$ άρα $f^2(x)=4x-x^2$ και αφού $f(x)>0$ τότε $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$

γ) Εστω $f(x)=y$ τότε $y=\sqrt{4x-x^2} \Rightarrow y^2=4x^2-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$

Οπότε η C_f είναι το ημικύκλιο του κύκλου με διάμετρο $\Gamma\Delta$, όπου $\Gamma(2,0)$ και $\Delta(0,4)$.

Για οποιαδήποτε χορδή AB του ημικυκλίου, ισχύει: $AB\le\Gamma\Delta$. Άρα $(AB)\le 4$

7. **α)** Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

f΄	+ ⌀ −
f	↗ Ο.Μ. ↘

$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le 1 \Leftrightarrow x\le e$

Είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,e)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$.

Για κάθε $x\in(e,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Έχει ολικό μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

β) $e<\alpha<\beta \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)>f(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{\ln\alpha}{\alpha}>\dfrac{\ln\beta}{\beta} \Leftrightarrow \beta\ln\alpha>\alpha\ln\beta \Leftrightarrow \ln\alpha^{\beta}>\ln\beta^{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^{\beta}>\beta^{\alpha}$.

γ) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\le f(e) \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e\ln x\le x \Leftrightarrow \ln x^{e}\le x \Leftrightarrow x^{e}\le e^{x}$.

δ) $x^{e}\le\alpha^{x} \Leftrightarrow \ln x^{e}\le\ln\alpha^{x} \Leftrightarrow e\ln x\le x\ln\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{\ln\alpha}{e} \Leftrightarrow f(x)\le\dfrac{\ln\alpha}{e}$.

Είναι $f(x)\le\dfrac{1}{e}$, για κάθε $x>0$, άρα πρέπει $\dfrac{1}{e}\le\dfrac{\ln\alpha}{e} \Leftrightarrow \ln\alpha\ge 1 \Leftrightarrow \alpha\ge e$.

8. **α)** Για $x=2$ είναι $2f(2)-4\ge f(2)+f(-2) \Leftrightarrow f(2)-f(-2)\ge 4$ (1)

Για $x=-2$ είναι $2f(-2)+4\ge f(2)+f(-2) \Leftrightarrow f(2)-f(-2)\le 4$ (2)

Από τις (1), (2) είναι $f(2)-f(-2)=4$.

β) Εστω $g(x)=f(x)-f(-2)-3,\ x\in[-2,2]$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής, οπότε και η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$.

Είναι $g(-2)=f(-2)-f(-2)-3=-3<0$ και $g(2)=f(2)-f(-2)-3=4-3=1>0$.

Δηλαδή $g(-2)g(2)<0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=f(-2)+3$.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(-2,0)$ και $\xi_2\in(0,2)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$.

Είναι $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}+\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[-2,2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{4}=\dfrac{4}{4}=1$

ε) Μια λύση της εξίσωσης $f'(x)=1$ είναι το ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Είναι $2f(x)-2x\ge f(2)+f(-2) \Leftrightarrow 2f(x)-2x-f(2)-f(-2)\ge 0$ (3)

Εστω $h(x)=2f(x)-2x-f(2)-f(-2), x\in\mathbb{R}$. Είναι $h(2)=0$ και $h(-2)=0$, και η (3) γίνεται $h(x)\geq h(-2)$ και $h(x)\geq h(2)$.

Δηλαδή η h παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1=-2$ και $x_2=2$.

Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=2f'(x)-2$, λόγω του θεωρήματος Fermat ισχύει: $\begin{cases} h'(-2)=0 \\ h'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f'(-2)-2=0 \\ 2f'(2)-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow\geq \begin{cases} f'(-2)=1 \\ f'(2)=1 \end{cases}$.

Άρα η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.

9. α) $g'(x)=f'(x)-4=\dfrac{4\cdot e^x+3}{e^x+4}-4=\dfrac{-13}{e^x+4}<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-4x=0 \Leftrightarrow$ $f(x)=4x$ έχει το πολύ μία ρίζα.

γ) Είναι $f''(x)=\left(\dfrac{4e^x+3}{e^x+4}\right)'=\dfrac{4e^x\left(e^x+4\right)-\left(4e^x+3\right)e^x}{\left(e^x+4\right)^2}=\dfrac{13e^x}{\left(e^x+4\right)^2}>0$, $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x,x+1]$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$.

Είναι $x<\xi<x+1$ και επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{4e^x+3}{e^x+4}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{4e^{x+1}+3}{e^{x+1}+4}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x+3}{e^x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(4+\dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{4}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{e^x}}{1+\dfrac{4}{e^x}}=4$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^{x+1}+3}{e^{x+1}+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}\left(4+\dfrac{3}{e^{x+1}}\right)}{e^{x+1}\left(1+\dfrac{4}{e^{x+1}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{e^{x+1}}}{1+\dfrac{4}{e^{x+1}}}=4$, οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=4$.

10. α) Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)-3x}{x-2}$, $x\neq 2 \Leftrightarrow f(x)=(x-2)g(x)+3x$ (1)

f παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής άρα $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0+6=6$

β) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)g(x)+3x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)+3\right]=1+3=4$

οπότε η εφαπτομένη $\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-6=4(x-2) \Leftrightarrow y=4x-2$

γ) Εστω $h(x)=f(x)-(x+3)$, $x\in[2,4]$. $h(2)=f(2)-5=1>0$, $h(4)=f(4)-7=-1<0$

και h συνεχής, άρα από θ.Β υπάρχει $x_0 \in (2,4): h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0+3$

δ) Επειδή $f(2)=f(4)=6$ από το Θ.Rolle για την f στο $[2,4]$ υπάρχει $\xi \in (2,4)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Αφού f κοίλη είναι $f' \downarrow$ στο $[2,4]$ οπότε ξ μοναδικό.

Για $2<x<\xi$ είναι $f'(x)>f'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [2,\xi]$

Για $\xi<x<4$ είναι $f'(x)<f'(\xi)=0 \Rightarrow f \downarrow [\xi,4]$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0=\xi$.

11. α) Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2}{x-1}$, $x \neq 1$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$. Τότε $f(x)=g(x)(x-1)+x^2$ και

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)(x-1)+x^2\right]=1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $x_0=1$, οπότε: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)(x-1)+x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)(x-1)+(x-1)(x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(g(x)+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(g(x)+x+1)=4.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι η ευθεία ε:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=4(x-1) \Leftrightarrow y=4x-3$$

β) Επειδή η f είναι κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ε, οπότε

$f(x) \geq 4x-3 \Leftrightarrow f(x)-4x+3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Για $x=2$ είναι $f(2)-4\cdot 2+3 \geq 0 \Leftrightarrow f(2) \geq 5$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1) \geq 5-1=4.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[1,\xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\xi_1)$, άρα λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(1)}{\xi_1-1}=\dfrac{f'(\xi_1)-4}{\xi_1-1} \geq 0$.

12. α) $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+x$, $h''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}+1$

Όμως $h''(x)>1$ άρα $\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>0 \Leftrightarrow f''(x)f(x)>f^2(x) \geq 0$ άρα

$f''(x)f(x)>0 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow}$ τότε $f''(x)>0$ άρα f κυρτή.

β) Είναι $\frac{f(4)}{f(2)}=e^{-6}$ οπότε $\ln\frac{f(4)}{f(2)}=\ln e^{-6}\Leftrightarrow \ln f(4)-\ln f(2)=-6\Leftrightarrow$

$\ln f(4)+8=\ln f(2)+2\Leftrightarrow \ln f(4)+\frac{1}{2}4^2=\ln f(2)+\frac{1}{2}2^2$

Άρα $h(4)=h(2)$ οπότε από Θ. Rolle $\exists x_0\in(2,4):h'(x_0)=0$

$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}+x_0=0\Leftrightarrow f'(x_0)=-x_0f(x_0)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(\ln x)}{\ln x}\frac{\ln x}{x}\right]=2014\cdot 0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\ln x)}{\ln x}\overset{\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(\ln u)}{u}=2014$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}$

13. α) $g'(x)=\frac{f'(x)x^2-f(x)2x}{x^4}=\frac{\cancel{x}(xf'(x)-2f(x))}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}}>0\Rightarrow g\uparrow(0,+\infty)$

β) $xf'(x)-2f(x)=2x\Leftrightarrow x^2f'(x)-2xf(x)=2x^2\Leftrightarrow\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{2}{x^2}\Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(-\frac{2}{x}\right)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{2}{x}+c\Leftrightarrow f(x)=-2x+cx^2,\ x>0,\ c\in\mathbb{R}$.

$f(2)=0\Leftrightarrow -4+4c=0\Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=x^2-2x,\ x>0$.

γ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{h(x)}{\ln^2(x-1)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to2}\frac{h'(x)}{\frac{2\ln(x-1)}{x-1}}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2-2x)(x-1)}{2\ln(x-1)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to2}\frac{(2x-2)(x-1)+x^2-2x}{\frac{2}{x-1}}=0$

14. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=2x(\ln x-\lambda)+x$

Επειδή η ευθεία $y=-2x+\frac{1}{2}$ εφάπτεται στη C_f στο Α, ισχύει:

$f'(1)=-2\Leftrightarrow -2\lambda+1=-2\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{2}$.

Τότε $f(1)=-2\cdot1+\frac{1}{2}\Leftrightarrow -2+\frac{1}{2}=1^2(\ln1-\lambda)\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=-\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{2}$

β) Για $\lambda=\frac{3}{2}$ είναι $f(x)=x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)$ και

$f'(x)=2x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+x=2x(\ln x-1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x(\ln x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ που απορρίπτεται

ή $x=e$.

x	0		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.

Για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(e)=-\frac{e^2}{2}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)=+\infty$, οπότε: Για το διάστημα $\Delta_1=(0,e]$, έχουμε:

$f(\Delta_1)=\left[f(e),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\left[-\frac{e^2}{2},0\right)$ και για το διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$,

έχουμε: $f(\Delta_2)=\left[f(e),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{e^2}{2},+\infty\right)$.

Άρα $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\frac{e^2}{2},+\infty\right)$.

δ) Επειδή $2014\in f(\Delta_2)=\left[-\frac{e^2}{2},+\infty\right)$ και $2014\notin f(\Delta_1)=\left[-\frac{e^2}{2},0\right)$,

υπάρχει $x_1\in(e,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2014$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e,+\infty)$, το x_1 είναι μοναδικό.

15. α) $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2)=\ln\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}$. Εστω $\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=u$.

Αν $\lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, οπότε

για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in\mathbb{R}$ πρέπει $\lambda=-1$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

β) i. $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}>0\Rightarrow f\uparrow(-1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, οπότε $f(A)=(-\infty,0)$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f

iii. $f(x)+\alpha^2=0\Leftrightarrow f(x)=-\alpha^2$.

Επειδή $-\alpha^2\in f(A)$ και η f είναι $\uparrow$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

16. α) Είναι $1+e^{-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $D_f=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{1}{2}=\frac{-2e^{-x}+1+e^{-x}}{2(1+e^{-x})}=\frac{1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}$.

Είναι $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 1-e^{-x}\ge 0 \Leftrightarrow e^{-x}\le 1 \Leftrightarrow e^{-x}\le e^{0} \Leftrightarrow -x\le 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Ελάχιστο το $f(0)=\ln 2$.

Είναι $f''(x)=\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(1+e^{-x})+\frac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}}+\frac{x}{2}\right]=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(e^{x}+1)-x+\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(e^{x}+1)-\frac{x}{2}\right]=+\infty$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-x})+\frac{x}{2}\right]=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-x})\right]=0$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$ η f είναι συνεχής και $\downarrow$, άρα $f(\Delta_1)=[\ln 2,+\infty)$

Στο διάστημα $\Delta_1=[0,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $\uparrow$, άρα $f(\Delta_2)=[\ln 2,+\infty)$.

Άρα $f(A)=[\ln 2,+\infty)$.

γ) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ οπότε δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{-x})+\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{x}+1)-\frac{x}{2}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}}{1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-x})\right]=\ln 1=0$. Άρα $y=\frac{1}{2}x$ πλάγια στο $+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{x}+1)-\frac{x}{2}}{x}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2}$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(1+e^{-x})+x\right]=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(e^{x}+1)-x+x\right]=0.$$

Άρα $y=-\frac{1}{2}x$ είναι πλάγια στο $-\infty$. Οι ασύμπτωτες τέμνονται στο $(0,0)$.

δ) Για κάθε $x>0$ είναι

$f(x)>\frac{x}{2}\Leftrightarrow \ln(1+e^{-x})+\frac{x}{2}>\frac{x}{2}\Rightarrow \ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)>0\Rightarrow \ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}}>1\Rightarrow \frac{e^{x}+1}{e^{x}}>1$ που ισχύει.

Για κάθε $x<0$ είναι

$f(x)>-\frac{1}{2}x\Leftrightarrow \ln(1+e^{-x})+\frac{x}{2}>-\frac{x}{2}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right)+x>0\Leftrightarrow \ln(1+e^{x})-x+x>0\Leftrightarrow$

$\ln\left(1+e^x\right)>0$ που ισχύει. Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τις ασύμπτωτες για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

17. α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=0$. Το κλάσμα $\dfrac{g'(x)}{f'(x)-2}$ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $\left[\alpha,+\infty\right)$ αφού $f'(x)\neq 2$ οπότε από το θεώρημα DLH προκύπτει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3}{f(x)-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{f'(x)-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)-2}{f'(x)-2}=1$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-3\Rightarrow y=-3$ οριζόντια στο $+\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$ άρα $y=2x-1$ πλάγια της C_f στο $+\infty$.

γ) Εστω ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1,\ \rho_2$ με $\rho_1<\rho_2$. Εφαρμόζουμε Rolle για τη g στο $\left[\rho_1,\ \rho_2\right]$ οπότε $\exists\,\xi\in\left(\rho_1,\ \rho_2\right): g'(\xi)=0$. Άρα $f'(\xi)-g'(\xi)=2\Leftrightarrow f'(\xi)=2$ άτοπο.

δ) $f'(x)-g'(x)=2\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=(2x)'$ άρα

$f(x)-g(x)=2x+c\Leftrightarrow f(x)-2x=g(x)+c\Leftrightarrow f(x)-2x+1=g(x)+c+1\Leftrightarrow$

$f(x)-2x+1=g(x)+3+c-2$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(g(x)+3\right)+c-2\right]$

δηλαδή $0=0+c-2\Leftrightarrow c=2$. Άρα $f(x)-g(x)=2x+2$.

18. α) Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x+9}{x+\beta}=3$

Αν $\alpha=2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ άτοπο.

Αν $\alpha\neq 2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{(\alpha-2)x}{x}=\alpha-2$ άρα $\alpha-2=3$ οπότε $\alpha=5$ και $f(x)=\dfrac{3x+9}{x+\beta}$.

Είναι $A_f=\mathbb{R}-\{-\beta\}$. Αν η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τότε αυτή θα είναι η $x=-\beta$. Επειδή όμως η ασύμπτωτη είναι η $x=-1$, ισχύει ότι $-\beta=-1\Leftrightarrow\beta=1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+9}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[(3x+9)\dfrac{1}{x+1}\right]=+\infty$

β) $f(x)=\dfrac{3x+9}{x+1}=\dfrac{3x+3+6}{x+1}=3+\dfrac{6}{x+1}$ άρα $G(x)=3x+6\ln|x+1|+c$ επειδή $G(0)=3$ τότε $c=3$ άρα $G(x)=3x+3+6\ln|x+1|$

γ) $g(x)=\dfrac{G(x)}{x+1}=3+6\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ για $x>-1$ οπότε

$g'(x)=6\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\geq 0\Leftrightarrow\ln(x+1)\leq 1\Leftrightarrow x+1\leq e\Leftrightarrow x\leq e-1$

Για κάθε $x\in(-1,e-1)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow(-1,e-1]$ και για κάθε $x>e-1$ είναι

$g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow[e-1,+\infty)$. Μέγιστο το $g(e-1)=3+\dfrac{6}{e}$.

19. α) $2xf(x)+x^2\left(f'(x)-3\right)=-f'(x)\Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)+f'(x)-3x^2=0\Leftrightarrow$

$2xf(x)+\left(x^2+1\right)f'(x)=3x^2$, άρα

$\left(f'(x)\left(x^2+1\right)\right)'=\left(x^3\right)'\Leftrightarrow f'(x)\left(x^2+1\right)=x^3+c\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3+c}{x^2+1},\ c\in\mathbb{R}$

Είναι $f(1)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1+c}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ για κάθε $x\neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\sqrt[50]{50}=50^{\frac{1}{50}},\ \sqrt[60]{60}=60^{\frac{1}{60}}$.

Εστω $g(x)=x^{\frac{1}{x}},\ x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)'=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)'=e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Είναι $g'(x)\geq 0\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e$

Για κάθε $x>e$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[e,+\infty)$. Είναι

$$e<50<60\overset{g\searrow[e,+\infty)}{\Rightarrow}g(50)>g(60)\Leftrightarrow 50^{\frac{1}{50}}>60^{\frac{1}{60}}\Leftrightarrow\sqrt[50]{50}>\sqrt[60]{60}\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f\left(\sqrt[50]{50}\right)>f\left(\sqrt[60]{60}\right)$$

γ) Εστω $M\left(x(t),y(t)\right)$,οι συντεταγμένες του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t με $y(t)=f\left(x(t)\right)$ και $x'(t)>0$.Είναι $y(t)=\dfrac{x^3(t)}{x^2(t)+1}$ και $y'(t)=\left(f\left(x(t)\right)\right)'=f'\left(x(t)\right)x'(t)$.

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, ισχύει ότι: $y'(t)=x'(t)\Leftrightarrow f'\left(x(t)\right)x'(t)=x'(t)\Leftrightarrow f'\left(x(t)\right)=1\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2(t)\left(x^2(t)+3\right)}{\left(x^2(t)+1\right)^2}=1\Leftrightarrow \cancel{x^4(t)}+3x^2(t)=\cancel{x^4(t)}+2x^2(t)+1\Leftrightarrow x^2(t)=1\Leftrightarrow x(t)=\pm 1.$$

Αν $x(t)=1$ τότε $y(t)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$, άρα $M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, ενώ αν $x(t)=-1$ τότε $y(t)=\dfrac{-1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$,

άρα $M\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

20. α) Εστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2, τότε $f(x)\leq f(2)\Leftrightarrow f(x)-f(2)\leq 0$.

Για κάθε $x\in(2,4)$ είναι $x-2>0$, άρα $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\leq 0$, οπότε και $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\leq 0$ (1).

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, ισχύει ότι $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\Leftrightarrow f'(2)\leq 0$ άτοπο.

Άρα η f δεν έχει μέγιστο στο 2.

β) Επειδή $f(2)<7<f(4)$ και η f είναι συνεχής στο $[2,4]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=7$.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x_1]$ και $[x_1,4]$, οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(2,4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_2)=\frac{f(x_1)-f(2)}{x_1-2}=\frac{2}{x_1-2}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{x_1-2}{2}\text{ και}$$

$$f'(x_3)=\frac{f(4)-f(x_1)}{4-x_1}=\frac{9-7}{4-x_1}=\frac{2}{4-x_1}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_3)}=\frac{4-x_1}{2}$$

$$\frac{1}{f'(x_2)}+\frac{1}{f'(x_3)}=\frac{x_1-2}{2}+\frac{4-x_1}{2}=\frac{\cancel{x_1}-2+4-\cancel{x_1}}{2}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x_3)+f'(x_2)}{f'(x_2)f'(x_3)}=1\Leftrightarrow f'(x_3)+f'(x_2)=f'(x_2)f'(x_3)$$

δ) $f'(x)=4-\dfrac{f(x)-1}{x}\Leftrightarrow xf'(x)=4x-f(x)+1\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-4x-1=0$

Εστω $g(x)=xf(x)-2x^2-x,\ x\in[2,4]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2,4)$ με $g'(x)=xf'(x)+f(x)-4x-1$

Επιπλέον $g(2)=2f(2)-8-2=10-10=0$, $g(4)=4f(4)-32-4=36-36=0$, δηλαδή $g(2)=g(4)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-4x-1=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,4)$.

ε) Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(2,4)$ και η f' είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,4]$. Για κάθε $2<x<4\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(2)<f'(x)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[2,4]$.

Επειδή $f(2)=5$ και $f(4)=9$, η f έχει σύνολο τιμών το $[5,9]$.

στ) Εστω $x\in(2,4)$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x]$ και $[x,4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(2,x)$ και $\xi_2\in(x,4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)-5}{x-2}\quad\text{και}\quad f'(\xi_2)=\frac{f(4)-f(x)}{4-x}=\frac{9-f(x)}{4-x}$$

Είναι $f'(\xi_1)\le2\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-5}{x-2}\le2\Leftrightarrow f(x)\le2x+1$ (1) και

$f'(\xi_2)\le2\Leftrightarrow\dfrac{9-f(x)}{4-x}\le2\Leftrightarrow9-f(x)\le8-2x\Leftrightarrow f(x)\ge2x+1$ (2)

Από τις (1),(2) είναι $f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in(2,4)$. Επειδή $f(2)=2\cdot2+1=5$ και $f(4)=2\cdot4+1=9$, είναι $f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in[2,4]$