ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΘΕΩΡΙΑ

1) **ΣΥΝΟΛΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ** $\mathbb{C} = \{ z = x+\psi i ,\ x, \psi \in \mathbb{R} \text{ και } i^2 = -1 \}$.

2) **ΣΥΝΟΛΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ** $I = \{ z = \psi i ,\ \psi \in \mathbb{R} \text{ και } i^2 = -1 \}$.

3) $i^\nu = \begin{cases} 0 & \text{αν } \nu = 4\kappa \\ 1 & \text{αν } \nu = 4\kappa+1 \\ -1 & \text{αν } \nu = 4\kappa+2 \\ i & \text{αν } \nu = 4\kappa+3 \end{cases}$

4) **ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ**

- $z_1 + z_2 = (x_1+\psi_1 i) + (x_2+\psi_2 i) = (x_1+x_2) + (\psi_1+\psi_2)i$
- $z_1 - z_2 = (x_1+\psi_1 i) - (x_2+\psi_2 i) = (x_1-x_2) + (\psi_1-\psi_2)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1+\psi_1 i)\cdot(x_2+\psi_2 i) = (x_1x_2 - \psi_1\psi_2) + (x_1\psi_2 + x_2\psi_1)i$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+\psi_1 i}{x_2+\psi_2 i} = \frac{(x_1+\psi_1 i)(x_2-\psi_2 i)}{(x_2+\psi_2 i)(x_2-\psi_2 i)} = \frac{x_1x_2+\psi_1\psi_2}{x^2+\psi^2} + \frac{x_2\psi_1 - x_1\psi_2}{x^2+\psi^2} i$
- $z_1^2 = (x_1+\psi_1 i)^2 = x_1^2 - \psi_1^2 + 2x_1\psi_1 i$
- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1+\psi_1 i = x_2 + \psi_2 i \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = x_2 \\ \psi_1 = \psi_2 \end{Bmatrix}$

5) **ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ:** αν $z = x+\psi i$, $x,\psi \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{z} = x - \psi i$

6) **ΕΙΚΟΝΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ:** $z = x+\psi i$, $x,\psi \in \mathbb{R}$ έχει εικόνα $M(x,\psi)$.

7) **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ:** $z = x+\psi i$, $x,\psi \in \mathbb{R} \to \vec{OM} = (x,\psi)$.

8) **ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ:** $z = x+\psi i$, $x,\psi \in \mathbb{R} \to |z| = \sqrt{x^2+\psi^2}$

9) • Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών είναι ίση με το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων
• Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίση με τη διαφορά των διανυσματικών τους ακτίνων

10) **ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$.

α) αν $\Delta > 0$ τότε δύο ρίζες πραγματικές. $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

β) αν $\Delta = 0$ τότε μια διπλή πραγματική ρίζα $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$

γ) αν $\Delta < 0$ τότε δύο συζυγείς μιγαδικές $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$.

δ) $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{4}\, i \Leftrightarrow z = \pm 2i$

11) **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΖΥΓΩΝ**

α) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ β) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ γ) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

δ) $\overline{(\bar{z})} = z$ ε) $\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$

ΠΡΟΣΟΧΗ! • Αν $z = x+\psi i$, $x,\psi \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = x - \psi i$

• Αν $z = x + \psi i$, $x,\psi \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{z} = \bar{x} + \overline{\psi i} = \bar{x} - \bar{\psi} i$

• Αν $z = \omega \Leftrightarrow \bar{z} = \bar{\omega}$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

12) • $z^2+w^2 = z^2 - i^2w^2 = (z-iw)(z+iw)$ αν $z,w \in \mathbb{C}$

• $z^2+w^2=0 \Leftrightarrow z^2-i^2w^2=0 \Leftrightarrow (z-iw)(z+iw)=0 \Leftrightarrow z=iw$ ή $z=-iw$ αν $z,w\in\mathbb{C}$.

• Αν $z^2+w^2=0$
- και $z,w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z=0$ και $w=0$
- και $z,w\in\mathbb{C}$ τότε δεν ισχύει $z=0$ και $w=0$ αλλά ισχύει $z=iw$ ή $z=-iw$.

13) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ $z=x+\psi i$, $x,\psi\in\mathbb{R}$.

α) $|z|=|\bar z|=|-z|=|-\bar z|=|\vec{OM}|=\sqrt{x^2+\psi^2}$

β) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ γ) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ δ) $|z^\nu|=|z|^\nu$

ε) $|z|^2=z\cdot\bar z$ στ) $||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$

ζ) $|z_1+z_2+\dots z_\nu|\le|z_1|+|z_2|+\dots+|z_\nu|$

ΠΡΟΣΟΧΗ • ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ $|z|^2=z^2$ στο $\mathbb{C}$ (ισχύει μόνο στο R)

• ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$

η) Αν $z=w$ τότε $|z|=|w|$ το αντίστροφο δεν ισχύει

θ) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)$.

14) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

α) $|z|=\rho,(\rho>0)\rightarrow$ κύκλος με κέντρο $K(0,0)$ ακτίνα ρ

β) $|z-z_0|=\rho,(\rho>0)\rightarrow$ κύκλος με κέντρο $K(x_0,\psi_0)$ ακτίνα ρ. και εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-\psi_0)^2=\rho^2$.

γ) $|z-z_0|<\rho,(\rho>0)\rightarrow$ τα εσωτερικά σημεία του κύκλου

δ) $|z-z_0|\le\rho,(\rho>0)\rightarrow$ κυκλικός δίσκος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ ακτ. ρ.

ε) $|z-z_0|>\rho,(\rho>0)\rightarrow$ τα εξωτερικά σημεία του κύκλου.

στ) $|z-z_1|=|z-z_2|\rightarrow$ ευθεία μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(z_1)$, $B(z_2)$

ζ) $|z-z_1|<|z-z_2|\rightarrow$ τα σημεία του ημιεπιπέδου, στο οποίο ανήκει ο z_1 όταν φέρω τη μεσοκαθ. στο AB.

η) $|z-z_1|+|z-z_2|=2\alpha$, ($\alpha>0$ και $2\alpha>2(E_1E_2)$)
Έλλειψη με εστίες $E_1(z_1)$, $E_2(z_2)$ αφού $(ME_1)+(ME_2)=2\alpha$.

θ) $|z-z_1|-|z-z_2|=2\alpha$, ($\alpha>0$ και $2\alpha<2(E_1E_2)$).
Ο ένας κλάδος της υπερβολής με εστία το $E(z_2)$ αφού $(ME_1)-(ME_2)=2\alpha$ και $(ME_1)>ME_2$.

15) $|z_1-z_2|=(M_1M_2)$ (Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

1) Πραγματική συνάρτηση με π. ορισμού το A ονομάζουμε μια διαδικασία (κανόνα) με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα πραγματικό αριθμό y.

2) Το σύνολο $f(A) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$. λέγεται Σύνολο Τιμών της f.

3) Γραφική Παράσταση της f είναι το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για κάθε $x \in A$.

4) ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g = A \\ f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in A \end{cases}$.

5) ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ι) $(f+g)$ < π. ορ. $A = D_f \cap D_g$. τύπος $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

ιι) $(f \cdot g)$ < π. ορ. $A = D_f \cap D_g$. τύπος $(f \cdot g)(x) = f(x) + g(x)$

ιιι) (f/g) < π. ορ $A = \{x \in D_f \cap D_g \text{ και } g(x) \neq 0\}$. τύπος $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

6) ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΗΣ f ΜΕ ΤΗ g. Αν A π. ορ της f και B π. ορισμού της g.

$g \circ f$ < π. ορ. $D = \{x / x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$. τύπος $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ΠΡΟΣΟΧΗ η $g \circ f$ ορίζεται όταν $D \neq 0$ και $f(A) \cap B = \emptyset$

ΠΡΟΣΟΧΗ $f \circ g \neq g \circ f$ και $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

7) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$
- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ τότε λέγεται γνησίως μονότονη.

ΠΡΟΣΟΧΗ Αν η $f \nearrow$ στο Δ τότε $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
Αν η $f \searrow$ στο Δ τότε $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) ΑΚΡΟΤΑΤΑ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

- **ΟΛΙΚΟ** ΜΕΓΙΣΤΟ Μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A **θα** λέμε ότι παρουσιάζει x_0 μέγιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

9) **ΑΡΤΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέγεται άρτια όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν α) το $-x \in A$ και β) $f(-x) = f(x)$. (έχει άξονα συμμετρίας τον xx')

10) **ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέγεται περιττή όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν α) το $-x \in A$ και β) $f(-x) = -f(x)$. (έχει κέντρο συμμετρίας το O)

11) **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1** μια συνάρτηση με π. ορισμού το A λέγεται 1-1 όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. (ορισμός).

ΠΡΟΣΟΧΗ ΙΣΧΥΟΥΝ

1) μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και ~~μόνο~~ αν ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.
2) Αν μια συνάρτηση f με π. ορ το A είναι γνησίως μονότονη στο A τότε είναι και 1-1 το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
3) Αν η f είναι 1-1 τότε για κάθε y του συνόλου τιμών η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση
4) Αν η f είναι 1-1 τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.
5) Αν η f είναι 1-1 τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

12) **ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**

Αν μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A και σύνολο τιμών το $f(A)$ είναι 1-1 τότε ονομάζω αντίστροφη της f μια συνάρτηση f^{-1} με π. ορισμού το $f(A)$ και σύνολο τιμών το A για την οποία ισχύει.

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \text{ για κάθε } x \in A.$$

ΙΣΧΥΟΥΝ α) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ β) $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in f(A)$ γ) οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία (ε) $y = x$

(13) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ ΣΤΟ x_0.

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}(f(x_0+h)) = \ell$.

3) Αν η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

4) Αν η f είναι ορισμένη μόνο σε ένα διάστημα (x_0,β) και όχι στο (α,x_0) τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

5) Αν η f είναι ορισμένη μόνο στο (α,x_0) και όχι στο (x_0,β) τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

6) <u>Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0 τότε.</u>

α) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

β) $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

γ) $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ αν $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

δ) $\lim_{x\to x_0} k f(x) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$

ε) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$

στ) $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)}$ αν $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$.

ζ) $\lim_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu}$

7) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$ τότε και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

8) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$
Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq 0$

9) Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

10) Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και ισχύει $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ τότε είναι και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$
(κριτήριο παρεμβολής)

11) $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ • $\lim_{x\to x_0} c = c$ • $\lim_{x\to x_0} x^{\nu} = x_0^{\nu}$

Αν $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα

• $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ αν $Q(x_0)\neq 0$

• $\lim_{x\to x_0} (\eta\mu x) = \eta\mu x_0$ • $\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

• $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ • $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

(14) ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ.

1) αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

2) αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

3) αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

4) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x)>0$

5) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x)<0$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$ • $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$ • $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$

7) Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο x_0 τότε.

• $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = \begin{cases} (+\infty)+(+\infty) = +\infty \\ (-\infty)+(-\infty) = -\infty \\ (+\infty)\pm \ell = +\infty \\ (-\infty)\pm \ell = -\infty \\ (+\infty)+(-\infty) \text{ απροσδιοριστία} \\ (\pm\infty)+0 = \pm\infty \end{cases}$

• $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = \begin{cases} (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty \\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty \\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty \\ (+\infty)\cdot(\ell>0) = +\infty \\ (+\infty)\cdot(\ell<0) = -\infty \\ (-\infty)\cdot(\ell>0) = -\infty \\ (-\infty)\cdot(\ell<0) = -\infty \\ (\pm\infty)\cdot 0 \text{ απροσδιόριστο.} \end{cases}$

(7)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \left(\frac{0}{0}\right) \text{ απροσδιοριστία (κάνω παραγοντοποίηση ή κανόνα DE L'HOSPITAL).} \\ \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \text{ απροσδιοριστία (" " " " ").} \\ \left(\frac{\pm\infty}{0}\right) = \lim\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty \\ \left(\frac{0}{\pm\infty}\right) = \lim\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = 0\cdot 0 = 0. \\ \frac{\alpha\neq 0}{\pm\infty} = \lim\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = \alpha\cdot 0 = 0. \\ \frac{\alpha\neq 0}{0} = \lim\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = \alpha\cdot(\pm\infty) = \pm\infty. \end{cases}$$

8) • Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

• Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

(15) ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $\pm\infty$.

1) Ισχύουν οι ιδιότητες όπως και $x \to x_0$.

2) $\lim_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$. • $\lim_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ $\nu\in\mathbb{N}^*$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\nu} = 0$ • $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

4) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ • $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

6) • $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$ αν $\alpha > 1$.

• $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$ αν $0<\alpha<1$.

7) • Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$ τότε $f(x)>0$ σε μια περιοχή του $+\infty$.

• Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$ τότε $f(x)<0$ σε μια περιοχή του $+\infty$

• Αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) > 0$ τότε $f(x)>0$ σε μια περιοχή του $-\infty$

• Αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) < 0$ τότε $f(x)<0$ σε μια περιοχή του $-\infty$

8) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x\right) = 0$ με κριτήριο Παρεμβολής

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

(1) ΟΡΙΣΜΟΙ. ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται.

α) Συνεχής στο $x_0 \in A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

β) Συνεχής στο A όταν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$

γ) Συνεχής στο (α, β) όταν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$

δ) Συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επί πλέον $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$, $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

(2) ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO (Θ.Β)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλαχ $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία η γραφ. παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' σε ένα τουλαχ x_0 ανάμεσα στα α, β.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ.Β

- Αν η f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$
- Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$ και η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(x_0) = 0$.
- Αν ρ_1, ρ_2 διαδοχικές ρίζες μιας συνεχούς συνάρτησης τότε η f διατηρεί πρόσημο. ανάμεσα στις ρίζες. και σε κάθε διάστημα που χωρίζεται το π. ορισμού από τις ρίζες
- Αν $f(x) \neq 0$ και η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ.
- Αν $f(x) \neq 0$ και η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και υπάρχει ένα $\alpha \in \Delta$ ώστε $f(\alpha) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$
- Αν $f(x) \neq 0$ και η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και υπάρχει ένα $\alpha \in A$ ώστε $f(\alpha) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in A$

(3) ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ. (Θ.Ε.Τ).

Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλαχιστον αριθμός x_0 ανάμεσα στα α, β ώστε $f(x_0) = \eta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ.Ε.Τ

- Αν η f συνεχής και όχι σταθερή σε ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $\eta \in f(\Delta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \Delta$ ώστε $f(x_0) = \eta$.
- Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.
- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως μονότονη και το $0 \in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ.

4) ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ τότε η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$

5) ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Αν η f συνεχής και $\nearrow$ στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ τότε Σ.Τ είναι $f(\Delta)=[f(\alpha),f(\beta)]$
- Αν η f συνεχής και $\searrow$ στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ τότε Σ.Τ είναι $f(\Delta)=[f(\beta),f(\alpha)]$
- Αν η f συνεχής και $\nearrow$ στο $\Delta=(\alpha,\beta)$ τότε ΣΤ $f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$
- Αν η f συνεχής και $\searrow$ στο $\Delta=(\alpha,\beta)$ τότε ΣΤ $f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to\beta} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
- Αν η f συνεχής και $\nearrow$ στο R τότε ΣΤ $f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$
- Αν η f συνεχής και $\searrow$ στο R τότε ΣΤ $f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

① **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗ f στο x_0:** Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός τότε το όριο αυτό λέγεται Παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$ δηλαδή $f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Τότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0.

② H f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ όταν είναι παραγωγίσιμη σε καθε $x_0 \in \Delta$.

③ H f παραγωγίσιμη στο (α, β) όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$

④ H f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ όταν είναι παραγωγίσιμη σε καθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $\lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$ και είναι πραγματικοί αριθμοί

ΠΡΟΣΟΧΗ ΑΛΛΟΣ ΤΥΠΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ $f'(x_0)=\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ όταν το όριο είναι πραγματικός αριθμός.

⑤ **ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ.**
Το $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$

⑥ **Εξίσωση Εφαπτομενης**
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η Εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ εχει τύπο: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$

⑦ **ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ**
Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ τότε είναι και συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα

(8) ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) $f(x) = c,\ x \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$
2) $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$
3) $f(x) = \alpha x,\ x \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = \alpha,\ x \in \mathbb{R}$.
4) $f(x) = x^{\nu},\ x \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathbb{N}^* \rightarrow f'(x) = \nu x^{\nu-1},\ x \in \mathbb{R}$
5) $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0,\ \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$.
6) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0,\ \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$
7) $f(x) = ημx,\ x \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = συνx,\ x \in \mathbb{R}$
8) $f(x) = συνx,\ x \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = -ημx,\ x \in \mathbb{R}$.
9) $f(x) = εφx,\ x \neq κπ + \frac{π}{2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{συν^2 x},\ x \neq κπ + \frac{π}{2}$
10) $f(x) = σφx,\ x \neq κπ \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{ημ^2 x},\ x \neq κπ$.
11) $f(x) = \ln x,\ x > 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$
12) $f(x) = \ln|x|,\ x \neq 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$
13) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$.
14) $f(x) = \alpha^x,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha > 0 \rightarrow f'(x) = \alpha^x \ln\alpha,\ x \in \mathbb{R}$.
15) $f(x) = x^{-\nu},\ x \neq 0,\ \nu \in \mathbb{N}^* \rightarrow f'(x) = -\nu x^{-\nu-1},\ x \neq 0$
16) $f(x) = x^{\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$ και α όχι ακέραιος τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο π. ορισμού της εκτός στο $x_0 = 0$ στη περίπτωση που το $\alpha \in (0,1)$. με $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(9) ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΤΟ x_0

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
4) $(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$
5) $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Προσοχή. $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

(10) ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΓΙΑ ΚΑΘΕ x.

1) $f'(x) = (f(x))'$
2) $(f+g)'(x) = (f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2) $(f \cdot g)'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)$
3) $(f/g)'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
4) $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

5) $\left(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$

6) $\left(c f(x)\right)' = c f'(x)$

ΠΡΟΣΟΧΗ
- $(f(x))' = f'(x)$ όταν το x είναι μεταβλητή.
- $(f(2))' \neq f'(2)$ όταν είναι παράγωγος αριθμού
- $(f(x^2))' = f'(x^2)\cdot(x^2)' = 2x f'(x)$.
- $(f(-x))' = f'(-x)\cdot(-x)' = -f'(-x)$.

(11) ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ της f στο x_0 λέγεται η Παράγωγος $f'(x_0)$.

• Αν η θέση ενός κινητού πάνω στον οριζόντιο άξονα είναι $x = x(t)$ τότε ο ρυθμός μεταβολής της θέσης ως προς t.
Λέγεται ταχύτητα δηλαδή $\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$
και ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας λέγεται επιτάχυνση
δηλαδή $\alpha(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon'(t) = x''(t)$.

(12) ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ. (ΘΜΤ)

Αν μία συνάρτηση f είναι
- συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- Παραγωγίσιμη στο (α,β).

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ (ΘΜΤ)
υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφ. παράστασης της f είναι παράλληλη στην ευθεία AB όπου $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$

(13) ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μία συνάρτηση f είναι
- συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- Παραγωγίσιμη στο (α,β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$.

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ
υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα xx'

14 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ

1. Αν η f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε $f(x)=c$ σε όλο το Δ.
2. Αν f, g συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(x)=g'(x)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε $f(x)=g(x)+c$ σε όλο το Δ.
3. <u>ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ</u>

Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- και $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η $f \nearrow$ σε όλο το Δ
- και $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η $f \searrow$ σε όλο το Δ

<u>ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΠΡΟΣΟΧΗ</u>

Αν η $f \nearrow$ στο Δ τότε $f'(x) \geq 0$ στο Δ.

Αν η $f \searrow$ στο Δ τότε $f'(x) \leq 0$ στο Δ.

15 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

α) <u>ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ (ΟΡΙΣΜΟΣ)</u> Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε.

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση τοπικού μεγίστου και το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

β) <u>ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ (ΟΡΙΣΜΟΣ)</u> Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο όταν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε.

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση τοπικού ελαχίστου και το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο

γ) <u>Πιθανές θέσεις ακροτάτων</u>

i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' μηδενίζεται
ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' δεν υπάρχει
iii) τα άκρα του Δ αν είναι κλειστό διάστημα.

δ) <u>Κρίσιμα σημεία της f</u>

i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' μηδενίζεται
ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' δεν υπάρχει

ε) <u>ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ</u>

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα x_0 στο οποίο όμως η f συνεχής

i) αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

x		0	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$

ii) αν $f'(x)<0$ στο (α, x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

x		0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f γνησ. μονότονη στο (α, β) και δεν έχει ακρότατο στο x_0.

15) <u>ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT.</u>

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ

- αν x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ
- και η f παραγωγίσιμη στο x_0
- και η f έχει ακρότατο στο x_0

τότε $f'(x_0)=0$.

16) <u>ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ. (ΟΡΙΣΜΟΣ)</u>

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Τότε θα λέμε.

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα πάνω στο Δ (κυρτή) αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ (κοίλη) αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

17) ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ

- αν $f''(x)>0$ στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ
- αν $f''(x)<0$ στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ
- <u>ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ</u>
- Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε $f''(x) \geq 0$ και η $f' \nearrow$ στο Δ.
- Αν η f είναι κοίλη στο Δ τότε $f''(x) \leq 0$ και η $f' \searrow$ στο Δ

18) <u>ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ. (ΟΡΙΣΜΟΣ)</u>

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως

• και η C_f έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ τότε
το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της f.

β) <u>Κριτήριο σημείων καμπής</u>

• Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 \in (\alpha, \beta)$
• και ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$
τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f

γ) <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f''(x_0) = 0$.

19 <u>ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ. (ΟΡΙΣΜΟΙ)</u>

α) Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται <u>κατακόρυφη ασύμπτωτη</u> της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

β) Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται <u>οριζόντια ασύμπτωτη</u> της γραφικής παράσταση της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) όταν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, (αντίστοιχα όταν $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$)

γ) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται <u>(ΠΛΑΓΙΑ) ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ</u> της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) όταν
$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$ αντίστοιχα $\left(\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0\right)$

20 Θεώρημα. (ΑΣΥΜΠΤΩΤΗΣ)

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αντίστοιχα στο $-\infty$ αν και μόνο αν:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$, $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$ αντίστοιχα $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$, $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$

21 <u>ΚΑΝΟΝΕΣ DE L'HOSPITAL</u>

α) **Αν** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, (ισχύει όταν και $x \to \pm\infty$)

β) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ και υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (ομοίως αν $x\to\pm\infty$)

(22) Παράγουσα (ορισμός)

Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζω Παράγουσα της f ή αρχική συνάρτηση κάθε συνάρτηση F τέτοια ώστε.

$F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

(23) ΘΕΩΡΗΜΑ

Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε.

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + C$ είναι παράγουσες της f.
- κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + C$.

(24) ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ

1) $f(x) = 0 \rightarrow F(x) = C$
2) $f(x) = x \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + C$.
3) $f(x) = 1 \rightarrow F(x) = x + C$.
4) $f(x) = x^{\nu} \rightarrow F(x) = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + C$, $(\nu \neq -1)$
5) $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln|x| + C$.
6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow F(x) = 2\sqrt{x} + C$.
7) $F(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow F(x) = -\frac{1}{x} + C$.
8) $F(x) = \eta\mu x \rightarrow F(x) = -\sigma\upsilon\nu x + C$.
9) $F(x) = \sigma\upsilon\nu x \rightarrow F(x) = \eta\mu x + C$.
10) $F(x) = \varepsilon\varphi x \rightarrow F(x) = \ln|\sigma\upsilon\nu x| + C$.
11) $F(x) = \sigma\varphi x \rightarrow F(x) = \ln|\eta\mu x| + C$.
12) $F(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x + C$.
13) $F(x) = \alpha^x \rightarrow F(x) = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C$, $\alpha > 0$
14) $F(x) = \ln x \rightarrow F(x) = x\ln x - x + C$.

25 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΟΡΙΣΜΟΣ).

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\cdot\Delta x\right).$$

26 ΤΥΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_\alpha^\beta = F(\beta)-F(\alpha)$$ όπου F παράγουσα της f

27 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ.

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύουν

α) $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$

β) $\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

γ) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

δ) $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

ε) $\int_\alpha^\beta (\lambda f(x)+\kappa g(x))\,dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \kappa\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

στ) Αν $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ και η f συνεχής στο Δ τότε.
$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$

ζ) $\int_\alpha^\beta \kappa\,dx = \kappa(\beta-\alpha)$.

η) Αν $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$.

θ) Αν $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ και δεν είναι παντού 0.
τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$

ι) αν $f(x)\geq g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

κ) αν $f(x)\geq g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και η ισότητα ισχύει για μερικές τιμές του x τότε $\int_\alpha^\beta f(x) > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

28 ΤΥΠΟΣ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ.

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx$$

όπου f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$

(29) ΤΥΠΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du.$$

Θέτω $u=g(x)$ τότε $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

(30) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ.

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f δηλαδή

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$$

(31) Ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

(32) ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ. ($E(\Omega)$).

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ τότε.

- Αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.
- Αν $f(x) \leq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- Αν η $f(x)$ δεν διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ τότε.

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx.$$

(33) ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ ΜΕΤΑΞΥ C_f, C_g.

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ τότε για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ ισχύουν τα εξής

α) Αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $E= \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

β) Αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $E= \int_{\alpha}^{\beta}(g(x) - f(x))dx$

γ) Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ τότε $E = \int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$