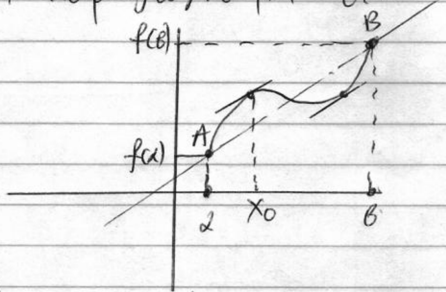
(72) ΜΑΘΗΜΑ 38 – 39.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ.

Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Παραγωγίσιμη στο (α,β) } τότε.



① Γεωμετρική ερμηνεία: Υπάρχει ένα τουλαχ. $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία AB όπου $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$.

② Αλγεβρική ερμηνεία: υπάρχει ένα τουλαχ $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ δηλαδή

(Συντελεστής διευθ της εφαπτ. = συντελ διευθ της AB)

Παρατήρηση Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε το Θ.Μ.Τ γίνεται Θ. Rolle.

Άρα το Θ. Rolle είναι ειδική περίπτωση του ΘΜΤ

$\boxed{\text{Είδη ασκήσεων}}$

1ο ΕΙΔΟΣ Για να δείξω ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = k$. (k = αριθμός) τότε:

i) Αν $k = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ κάνω ΘΜΤ για την f στο $[\alpha, \beta]$

ii) κάνω Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) - kx$ στο $[\alpha, \beta]$ αν $g(\alpha) = g(\beta)$.

iii) κάνω Θ. Bolzano για την $h(x) = f'(x) - k$ στο $[\alpha, \beta]$ αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$.

Άσκηση 1 Έστω $f(x) = x\ln x + 1$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_0) = \ln 4$

β) Να βρεθεί το x_0

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(x_0, f(x_0))$.

Λύση

α) Παρατηρώ ότι $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \ln 4$

Άρα κάνω ΘΜΤ στο $[1, 2]$.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $[1, 2]$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $(1, 2)$

με $f'(x) = \ln x + 1$.

Άρα ισχύει το ΘΜΤ.

άρα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2\ln 2 + 1 - 1}{1} = \ln 4.$$

β) $f'(x_0) = \ln 4 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 = \ln 4 \Leftrightarrow \ln x_0 = \ln 4 - \ln e$

$\ln x_0 = \ln \frac{4}{e} \Leftrightarrow x_0 = \frac{4}{e}$

γ) $y - f(\frac{4}{e}) = f'(\frac{4}{e})(x - \frac{4}{e})$

$y - \frac{4}{e}\ln\frac{4}{e} - 1 = (\ln\frac{4}{e} + 1)(x - \frac{4}{e})$ ..

$y - \cancel{\frac{4}{e}\ln\frac{4}{e}} - 1 = x(\ln\frac{4}{e} + 1) - \cancel{\frac{4}{e}\ln\frac{4}{e}} - \frac{4}{e}$.

$y = x(\ln\frac{4}{e} + 1) - \frac{4}{e} + 1$.

* Λίγκαδη. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + x, & x \leq 0 \\ 2x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$

α) ΘΜΤ στο $[-1, 3]$, $f'(\xi) = \frac{9}{2}$

β) να βρεθεί το ξ

γ) εξ. εφαπτ.

2ο ΕΙΔΟΣ Αν γνωρίζω μια ανισότητα $\alpha < f(x) < \beta$ και ζητάω μια ανισότητα $\gamma < f'(x_0) < \delta$ ή και το αντίστροφο τότε χρησιμοποιώ το ΘΜΤ.

ΑΣΚΗΣΗ 2 Αν η f παραγωγίσιμη στο $[2,5]$ και $f(2)=2$ και $5 \le f(x) \le 17$ $\forall\, x \in [2,5]$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,5)$ ώστε $1 \le f'(\xi) \le 5$

Λύση

Αφού η f παραγ. στο $[2,5]$ άρα και συνεχής. Ισχύει το ΘΜΤ άρα υπάρχει $\xi \in (2,5)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{f(5)-2}{3} \Leftrightarrow f(5) = 3f'(\xi)+2$$

Αφού $5 \le f(x) \le 17$ $\forall\, x \in [2,5]$ ισχύει και για το 5 άρα $5 \le f(5) \le 17 \Leftrightarrow 5 \le 3f'(\xi)+2 \le 17 \Leftrightarrow$

$1 \le f'(\xi) \le 5$

ΑΣΚΗΣΗ 3 Αν η f παραγωγίσιμη στο $[0,4]$ και $f(0)=1$ και για κάθε $x \in [0,4]$ ισχύει $3 \le f'(x) \le 6$ Να δείξετε $13 \le f(4) \le 25$

Λύση

Η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0,4]$, ισχύει το Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi \in (0,4)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{f(4)-1}{4}$$

Αφού $3 \le f'(x) \le 6$ τότε και $3 \le f'(\xi) \le 6$ άρα

$$3 \le \frac{f(4)-1}{4} \le 6 \Leftrightarrow 13 \le f(4) \le 25$$

Άσκηση 4/ Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $|f'(x)| \leq K$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να δείξετε $|f(\beta)-f(\alpha)| \leq K(\beta-\alpha)$.

Λύση.

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. και αφού $|f'(x)| \leq K$ για κάθε x.

άρα ισχύει και για $\xi \in (\alpha,\beta)$ άρα $|f'(\xi)| \leq K \Leftrightarrow$

$\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \leq K \Leftrightarrow |f(\beta)-f(\alpha)| \leq K(\beta-\alpha)$ αφού $\beta-\alpha>0$.

3ο ΕΙΔΟΣ/ Για να δείξω ανισότητες που παίρνουν τη μορφή

$K < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \lambda$.

Κάνω ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Βρίσκω τη μονοτονία της f'

και αφού $\xi \in (\alpha,\beta)$ είναι $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow$

αν $f' \nearrow$ $f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow K < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \lambda$.

αν $f' \searrow$ $f'(\alpha) > f'(\xi) > f'(\beta) \Leftrightarrow \lambda > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} > K$

Άσκηση 5/ Για κάθε $\alpha<\beta$ να δείξετε.

$(\beta-\alpha)e^{\alpha} < e^{\beta}-e^{\alpha} < (\beta-\alpha)e^{\beta}$

Λύση.

Αφού το $\beta-\alpha>0$ η ανισότητα παίρνει τη μορφή $e^{\alpha} < \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < e^{\beta} \Leftrightarrow$

$e^{\alpha} < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < e^{\beta}$ αν θέσω $f(x)=e^{x}$.

Άρα λύνεται με ΘΜΤ

Έστω $f(x) = e^x$ η f συνεχής στο R άρα και στο $[\alpha, \beta]$

η f παραγωγίσιμη στο R άρα και στο (α, β).

με $f'(x) = e^x$

Ισχύει το ΘΜΤ άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε.

$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$.

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$ η $f' \nearrow$ στο R και αφού

$\xi \in (\alpha, \beta)$ άρα $\alpha < \xi < \beta \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow$

$e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta \overset{\beta - \alpha > 0}{\Longleftrightarrow} e^\alpha(\beta - \alpha) < e^\beta - e^\alpha < e^\beta(\beta - \alpha)$.

Άσκηση 6/ Για κάθε $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε.

$\frac{1}{\beta}(\beta - \alpha) < \ln\frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{\alpha}(\beta - \alpha)$.

Λύση.

αφού $\beta > \alpha$ η ανισότητα γράφεται $\frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln\beta - \ln\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$.

αν θέσω $\underline{\underline{f(x) = \ln x}}$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα.

και στο $[\alpha, \beta]$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$.

άρα ισχύει το ΘΜΤ. άρα υπάρχει.

$\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}$.

αν $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$ στο $(0, +\infty)$

άρα η $f' \searrow$ στο $(0, +\infty)$

αφού $\alpha < \xi < \beta \overset{f' \searrow}{\Longleftrightarrow} f'(\alpha) > f'(\xi) > f'(\beta) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha} > \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} > \frac{1}{\beta} \overset{\beta - \alpha > 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\alpha}(\beta - \alpha) > \ln\frac{\beta}{\alpha} > \frac{1}{\beta}(\beta - \alpha)$

Άσκηση. Να δείξετε $\frac{1}{5} < \ln\frac{5}{4} < \frac{1}{4}$.

4ο Είδος Για να δείξω ανισότητες που παίρνουν τη μορφή $g(x) < \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < h(x)$ κάνω ΘΜΤ στο $[\alpha, x]$ αν $x>\alpha$ ή στο $[x,\alpha]$ αν $x<\alpha$.
οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ ή στο (x,α) ώστε
$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ στη συνέχεια βρίσκω τη μονοτονία της f' και,
αφού $\alpha<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow$
$f'(\alpha) < \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < f'(x) \Leftrightarrow$, κτλ. ...

• Ειδική περίπτωση αν $f(0)=0$ για να δείξω ανισότητες της μορφής $k < \frac{f(x)}{x} < f'(x)$ κάνω ΘΜΤ στο $[0,x]$ αν $x>0$ και στο $[x,0]$ αν $x<0$ κτλ.

• Για να δείξω $k(x) < f(x+1) - f(x) < \lambda(x)$ κάνω ΘΜΤ στο $[x, x+1]$

Άσκηση 7/ για κάθε $x>0$ να δείξετε:
$$x+1 < e^x < xe^x + 1.$$

Λύση.

Η ανισότητα γράφεται $x+1 < e^x < xe^x + 1 \Leftrightarrow x < e^x - 1 < xe^x$
$\Leftrightarrow 1 < \frac{e^x - e^0}{x-0} < e^x \Leftrightarrow 1 < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < e^x$ αν θέσω $f(x) = e^x$

Άρα.

$f(x) = e^x$ η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,x]$ $\forall x>0$
η f παραγωγ. στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0,x)$ $\forall x>0$.

ισχύει το ΘΜΤ. άρα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

όμως $f'(x) = e^x$, και αφ. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$.
άρα η $f' \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. και αφού
$$0 < \xi < x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow$$
$$e^0 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < e^x - 1 < xe^x \Rightarrow$$
$$x+1 < e^x < xe^x + 1.$$

Άσκηση 8/ Για κάθε $x>0$ να δείξετε:
$$\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1.$$

Λύση

Η ανίσωση γράφεται $\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1$ αν $x>1$.
και $\frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x-1} > 1$ αν $x<1$.
και ισχύει η ισότητα αν $x=1$.

άρα:

i) Για $x=1$ ισχύει σαν ισότητα.

έστω $f(x)=\ln x$. Π.ορ $A=(0,+\infty)$.

ii) Για $x>1$ η f συνεχής στο $[1,x]$ για κάθε $x>1$.
η f παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ για κάθε $x>1$ με:
$f'(x)=1/x$ άρα ισχύει το ΘΜΤ άρα υπάρχει
$\xi\in(1,x)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}$.

αν $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1)>f'(x_2)$ άρα η $f'\downarrow$ στο $(0,+\infty)$

και αφού $1<\xi<x \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(1)>f'(\xi)>f'(x) \Leftrightarrow$
$1>\frac{\ln x}{x-1}>\frac{1}{x} \overset{x>1}{\Longleftrightarrow} x-1>\ln x>\frac{x-1}{x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$

iii) Για $x<1$ η f συνεχής στο $[x,1]$ και παραγωγ.
στο $(x,1)$ για κάθε $0<x<1$ με $f'(x)=1/x$
άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi\in(x,1)$ ώστε.
$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{0-\ln x}{1-x}=\frac{\ln x}{x-1}$$

και αφού $x<\xi<1 \overset{f'\downarrow}{\Longleftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)>f'(1) \Rightarrow$
$\frac{1}{x}>\frac{\ln x}{x-1}>1 \overset{x-1<0}{\Longleftrightarrow} \frac{x-1}{x}<\ln x<x-1.$

άρα Για κάθε $x>0$ ισχύει $\frac{x-1}{x}\le \ln x\le x-1.$

Άσκηση 9/ Αν η $f' \nearrow$ στο $[0,+\infty)$ και $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ να δείξετε i) $x < f(x) < x f'(x) \ \forall x>0$
ii) αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell > 0$ να δείξετε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Λύση

i) Αφού η f έχει παράγωγο στο $[0,+\infty)$ θα είναι και συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα
η f συνεχής στο $[0,x]$ και παραγωγ. στο $(0,x)$ για κάθε $x>0$ άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ ώστε, $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$,
αφού $0<\xi<x \xLeftrightarrow{f'\nearrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow f'(0) < \frac{f(x)}{x} < f'(x)$
$\xLeftrightarrow{x>0} x f'(0) < f(x) < x f'(x) \Leftrightarrow x < f(x) < x f'(x)$

ii) Αφού $x < f(x) < x f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x f'(x) = +\infty$
τότε και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (από κριτήριο παρεμβολής)

Άσκηση 10/ Αν η $f' \downarrow$ στο $[0,+\infty)$, να δείξετε.
$f'(x+1) < f(x+1) - f(x) < f'(x) \ \forall x>0$.

Λύση

Αφού υπάρχει η f' στο $[0,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0,+\infty)$
άρα η f συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγ $(x, x+1)$ για κάθε $x>0$ άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ
άρα υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ ώστε.
$$f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = f(x+1) - f(x)$$
αφού $x < \xi < x+1 \xLeftrightarrow{f'\downarrow} f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow$
$f'(x) > f(x+1) - f(x) > f'(x+1)$

5^o είδος

Για να δείξω ανισότητες που παίρνουν τη μορφή $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \lessgtr \frac{f(\gamma)-f(\delta)}{\gamma-\delta}$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta$

κάνω 2 ΘΜΤ για $[\alpha,\beta]$ και $[\gamma,\delta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ και $\xi_2 \in (\gamma,\delta)$ ώστε
$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}$.

βρίσκω τη μονοτονία της f' και αφού
$\xi_1 < \xi_2 \overset{\text{αν } f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}$

Ομοίως για να δείξω ανισότητες.
$2f(\alpha+1) \leq f(\alpha+2)+f(\alpha)$ μετατρέπονται
$\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha} \leq \frac{f(\alpha+2)-f(\alpha+1)}{\alpha+2-\alpha-1}$ κάνω ΘΜΤ
για $[\alpha,\alpha+1]$, $[\alpha+1,\alpha+2]$ κτλ.

Ομοίως για να δείξω ανισότητε.
$2f(x+1) \leq f(x+2)+f(x)$ κάνω ΘΜΤ
για $[x,x+1]$, $[x+1,x+2]$ κτλ

Άσκηση 11/ Αν η $f' \searrow$ στο $\mathbb{R}$ να δείξετε
ότι $f(3) > \frac{f(2)+f(4)}{2}$

λύση

Αφού υπάρχει η f' η f παραγωγ. στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής άρα.
Η f συνεχής για $[2,3]$, $[3,4]$ και
Παραγωγίσιμη για $(2,3)$, $(3,4)$ άρα ισχύει
το ΘΜΤ σε κάθε ένα διαστήματος
υπάρχει $\xi_1 \in (2,3)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$
και $\xi_2 \in (3,4)$ ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3}$

Αφού $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Longrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$
$f(3) - f(2) > f(4) - f(3) \Leftrightarrow 2f(3) \geq f(2) + f(4) \Leftrightarrow$
$f(3) \geq \frac{f(2)+f(4)}{2}$

Άσκηση 12/ Αν $f' \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ να δείξεις.
$2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$. λύση.
ΘΜΤ στα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$ κτλ.

6ο ΕΙΔΟΣ/ Για να δείξω ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση με τα $f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots f'(\xi_k)$.
Χωρίζω το διάστημα (α, β) σε k υποδιαστήματα και σε κάθε ένα κάνω ΘΜΤ.

- Αν δεν δίνεται καποια βοήθεια τότε χωρίζω το (α, β) σε k ίσα υποδιαστήματα.
- Αν έχω ένα πρώτο ερώτημα ώστε να υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \lambda$. τότε χωρίζω το διάστημα (α, β) σε (α, x_0), (x_0, β).

Άσκηση 13/ Αν γνωρίζω ότι ισχύει το Θ. Rolle για την f στο $[0,3]$ να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2, ξ_3 ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$

λύση

Αφού ισχύει το Θ. Rolle η f συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ και $f(0) = f(3)$
Άρα σε κάθε ένα από τα $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ ισχύει το ΘΜΤ επομένως υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ $f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$, $f'(\xi_3) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$

άρα $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) = f(3) - f(0) = 0$

Άσκηση 14/ Αν η f παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ και $f(1)=1$, $f(5)=5$ να δείξετε

α) υπάρχει $x_0 \in (1,5)$ ώστε $f(x_0)=6-x_0$

β) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,5)$ ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

Λύση

Η f συνεχής στο $[1,5]$ αφού είναι παραγωγ.

Έστω $g(x)=f(x)-6+x_0$

Η g συνεχής στο $[1,5]$ ως πράξ. συνεχ. συναρτ.

$f(1)=f(1)-6+1=f(1)-5=1-5=-4<0$

$f(5)=f(5)-6+5=f(5)-1=5-1=4>0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,5)$ ώστε

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-6+x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=6-x_0$

Στα $[1,x_0]$, $[x_0,5]$ ισχύει το ΘΜΤ.

άρα υπάρχουν $x_1 \in (1,x_0)$ $x_2 \in (x_0,5)$ ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{6-x_0-1}{x_0-1}=\frac{5-x_0}{x_0-1}.$$

$$f'(x_2)=\frac{f(5)-f(x_0)}{5-x_0}=\frac{5-(6-x_0)}{5-x_0}=\frac{x_0-1}{5-x_0}.$$

άρα $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$.

7ο είδος/ Αν θέλω να δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) \gtrless 0$ τότε κάνω ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$

Αν θέλω να δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi) \lesseqgtr 0$ τότε κάνω δύο ΘΜΤ στο $[\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$ με $\gamma \in (\alpha,\beta)$ και ένα στο $[\xi_1,\xi_2]$ για την f'

Άσκηση 15/ Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f(\gamma)>0$, με $\gamma \in (\alpha,\beta)$ να δείξετε

α) υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi_1)\geq 0$

β) υπάρχουν $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi_2)<0$.

γ) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) < 0$

λύση

α) Στο $[\alpha, \gamma]$ ισχύει το ΘΜΤ άρα υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} > 0$

β) Στο $[\gamma, \beta]$ ισχύει το ΘΜΤ άρα υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{\beta - \gamma} < 0$

γ) στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την f' ισχύει το ΘΜΤ άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε.

$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$ αφού $f'(\xi_1) + (-f'(\xi_1)) < 0$ και $\xi_2 - \xi_1 > 0$.

8 είδος! Αν γνωρίζω ότι η f 2φορές παραγωγίσιμη και $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ τότε κάνω 2 ΘΜΤ σια $[\alpha, \beta]$, $[\gamma, \beta]$ οπότε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ άρα από Θ Rolle δείχνω ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) = 0$

Άσκηση 26! Αν η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι συνευθειακά να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ ώστε $f''(\xi) = 0$

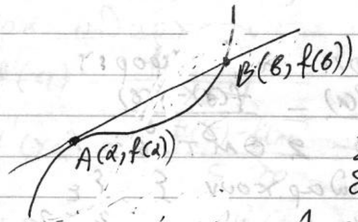
λύση

Αφού η f παραγ στο $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ άρα και συνεχής υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

Όμως τα A, B, Γ είναι συνευθειακά άρα
$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta} \Rightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

στο $[\xi_1, \xi_2]$ η f' παραγ. άρα και συνεχής
και αφού $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ ισχύει το Θ. Rolle
άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \gamma)$ ώστε
$f''(\xi) = 0$.

<u>Άσκηση 17</u> Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ τέμνει τη γραφική παράσταση και σε άλλο σημείο $B(\beta, f(\beta))$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε
$f''(\xi) = 0$.



<u>Λύση.</u>

Συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο A είναι
$\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(\alpha)$ ①

Επίσης η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ②

Αφού η f παραγ. στο $[\alpha, \beta]$ είναι και συνεχής άρα ισχύει το ΘΜΤ στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρ. $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\gamma) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ③

από ①, ②, ③ $\Longrightarrow f'(\alpha) = f'(\gamma)$ οπότε,
από Θ. Rolle στο $[\alpha, \gamma]$ και την f'
υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

9ο είδος. Για να δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση που περιέχει τα $f'(\xi)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ και $\beta-\alpha$ μετατρέπεται σε $g'(\xi) = \dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

κάνω ΘΜΤ στην $g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$

(Η g συνήθως δίνεται ή τη βρίσκω χωρίζοντας τα ξ από τα υπόλοιπα.)

Άσκηση 18/ Αν η f παραγ. στο R με $f(x)>0$ να δείξεις ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \quad (1)$$

λύση

Η (1) γίνεται $\ln \dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \Leftrightarrow$ τα ξ τα υπόλοιπα

$\ln f(\beta) - \ln f(\alpha) = (\beta-\alpha) \cdot \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} \Leftrightarrow \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

η $g'(\xi) = \dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$ αν $g(x) = \ln f(x)$

οπότε κάνω ΘΜΤ στην $g(x)$.

Η g συνεχής στο R άρα και στο $[\alpha, \beta]$ ως π.σ.
Η g παραγ. στο R άρα και στο (α, β) ως π.π.σ
με $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ άρα ισχύει το ΘΜΤ
Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$\Leftrightarrow (\beta-\alpha) \cdot \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \ln \dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)} \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha) \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

Προσοχή για να δείξω μια πολύπλοκη σχέση που περιέχει το $f'(\xi)$ τότε κάνω Rolle ή ΘΜΤ όχι όμως στην f αλλά σε μια άλλη συνάρτηση $g(x)$.
(Αν η σχέση περιέχει και τα $f(\beta)$, $f(\alpha)$ το $(\beta-\alpha)$ τότε κάνω ΘΜΤ)

Άσκηση 19/ Αν η f παραγ. στο $[\alpha, \beta]$ και $g(x) = f^2(x)$, $(f(x) \neq 0)$
να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f^2(\beta) - f^2(\alpha)}{2(\beta-\alpha) \cdot f(\xi)}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Άσκηση 1) Έστω $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-2,1)$ ώστε $f'(\xi)=\sqrt{3}/3$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ με $A(-2,f(-2))$, $B(1,f(1))$.

Άσκηση 2) Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=\kappa\beta$ και $f(\beta)=\kappa\alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+\kappa=0$.

Άσκηση 3) Αν f παραγωγ. στο $[0,2]$ και η f έχει σύνολο τιμών το $[1,5]$ και $f(0)=0$ Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ ώστε $\frac{1}{2}\le f'(\xi)\le \frac{5}{2}$

Άσκηση 4) Αν η f παραγωγ. στο $[1,5]$ και $f(1)=4$ και για κάθε $x\in[1,5]$ ισχύει $2\le f'(x)\le 3$ Να δείξετε ότι $12\le f(5)\le 16$.

Άσκηση 5) $f(x)=\eta\mu x$ και $\alpha<\beta$. Να δείξετε $|\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha|\le \beta-\alpha$

Άσκηση 6) Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $\kappa<f'(x)<\lambda$ και $f(0)=0$ με $\kappa,\lambda\in R^*_+$ τότε να δείξετε ότι για κάθε $x\neq 0$.

α) ισχύει $\kappa<\frac{f(x)}{x}<\lambda$

β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Άσκηση 7) Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=1$ Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi_1)<0$ και $\xi_2\in(1,2)$ ώστε $f'(\xi_2)>0$ και $\xi\in(0,2)$ ώστε $f''(\xi)>0$.

Άσκηση 8) Αν $0<\alpha<\beta<\pi/2$ Να δείξετε ότι:
$\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha}<\varepsilon\varphi\beta$.

Άσκηση 9/ Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{\alpha+1} < \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) < \frac{1}{\alpha}.$$

Άσκηση 10/ Να δείξετε ότι $\frac{1}{3} < \ln\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$.

Άσκηση 11/ Να δείξετε ότι $\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha < \frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$.
για κάθε $0 < \alpha < \beta < \pi/2$

Άσκηση 12/ Αν $f(x) = \ln(x+1)$

α) Να δείξετε ότι η $f' \downarrow$ στο $(-1, +\infty)$.

β) για κάθε $x > 0$ να δείξετε $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$.

Άσκηση 13/ Αν $f(x) = \eta\mu x$ α) να δείξετε $f'(x) \downarrow$ στο $[0, \pi/2]$
β) για κάθε $x \in (0, \pi/2]$ να δείξετε
$x\,\sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x < x$

Άσκηση 14/ Για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

Άσκηση 15/ Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,4]$ και $f(0)=4$, $f(4)=8$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (0,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)+f'(\xi_4) = 4$.

Άσκηση 16/ Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=0$, $f(1)=1$

α) να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) = 1-\xi$

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) = 1$.

Άσκηση 17 Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $f' \downarrow$ στο $\mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $2f(\lambda+1) > f(\lambda) + f(\lambda+2)$ για $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 18/ Αν η $f' \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι
$2f(20) < f(10) + f(30)$.

Άσκηση 19/ Αν η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f(\frac{\alpha+\beta}{2})$, $f(\beta)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δηλαδή $f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})=f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλ. $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

Άσκηση 20/ Αν η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $O(0,0)$ και είναι περιττή.
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλ. $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε $f''(\xi)=0$

Άσκηση 21/ Αν η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ και είναι άρτια και $f(\alpha)>0$ και $f(0)<0$
Να δείξετε:
α) υπάρχει $\xi_1\in(-\alpha,0)$ ώστε $f'(\xi_1)<0$
β) υπάρχει $\xi_2\in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi_2)>0$.
γ) υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε $f''(\xi)>0$.

Άσκηση 22/ Έστω η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)=e^{f(x)}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)\cdot e^{f(\xi)}\cdot(\beta-\alpha)=e^{f(\beta)}-e^{f(\alpha)}$

Άσκηση 23/ Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)>0$ και $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f^2(\xi)\cdot(f(\beta)-f(\alpha))}{(\beta-\alpha)\cdot f(\alpha)\cdot f(\beta)}$$

Άσκηση 24