ΜΑΘΗΜΑ 41.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ.

ΘΕΩΡΗΜΑ • Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ τότε η $f \nearrow$ στο Δ.

• Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ τότε η $f \searrow$ στο Δ.

Προσοχή Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ και η f' μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία και όχι σε διάστημα τότε $f \nearrow$ σε όλο το Δ.

Δηλαδή

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	$\nearrow$

x	
$f'(x)$	−
$f(x)$	$\searrow$

x		x_0	
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

x		x_0	
$f'(x)$	−	0	−
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	−	0	−	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Προσοχή αν η f' δεν ορίζεται στο x_0 ενώ ορίζεται η f. τότε.

α)

x		x_0	
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

x		x_0	
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

αν η f είναι συνεχής στο x_0.

x		x_0	
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Προσοχή Αντίστροφα ισχύουν

Αν η $f \nearrow$ σε ένα διάστημα Δ τότε $f'(x) \geq 0$ στο Δ.

Αν η $f \searrow$ σε ένα διάστημα Δ τότε $f'(x) \leq 0$ στο Δ.

Ακρότατα συνάρτησης

α) Αν $f'(x_0)=0$.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗
		Ο.Ε	

β)

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘
		Ο.Μ.	

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘
		Τ.Ε		Τ.Μ.	

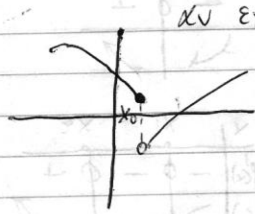
β) Αν η f' δεν ορίζεται στο x_0

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	↘		↗
		Ο.Ε	

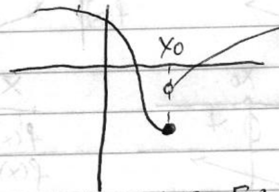
αν η f είναι συνεχής στο x_0. τότε έχει ακρότατο.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$
	↗		↘
		Ο.Μ.	

Αν δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν γνωρίζω αν έχει ή δεν έχει ακρότατο στο x_0



δεν έχει ακρότατο στο x_0



έχει ακρότατο στο x_0.

γ) Αν η f είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

x	α [		] β
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		↗	
	Ο.Ε		ΟΜ.

Όταν έχω κλειστό διάστημα στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση τότε στα άκρα του διαστήματος αν είναι συνεχής έχει ακρότατα.

x	α [		x_0		] β
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	
	ΤΜ		Ο.Ε		ΤΜ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΓΙΑ ΠΙΘΑΝΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης είναι

α) όπου μηδενίζεται η παράγωγος

β) όπου δεν ορίζεται η παράγωγος αλλά ορίζεται η συνάρτηση

γ) Στα άκρα κλειστού διαστήματος

ΠΡΟΣΟΧΗ Αν $f'(x_0)=0$ δεν αρκεί για να έχει η συνάρτηση ακρότατο στο x_0. Πρέπει επιπλέον να εξετάζω αν αλλάζει πρόσημο η f' εκατέρωθεν του x_0.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

δεν έχει ακρότ. στο x_0.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

έχει ακρότατο στο x_0.

Ασκήσεις

Α) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ.

1) $f(x)=x^2\ln x$. Να εξετάσετε μονοτονία ακρότατα.

Π.ορ $A=(0,+\infty)$ η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως π.σ.σ.

και $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ απορ. ή $2\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\ln x=\ln e^{-1/2} \Leftrightarrow x=e^{-1/2}$

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$2\ln x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	

για $x\in(0,e^{-1/2}]$ η f $\searrow$

για $x\in[e^{-1/2},+\infty)$ η f $\nearrow$

για $x=e^{-1/2}$ έχει ολικό ελάχιστο το $y=f(e^{-1/2})=-\frac{1}{2e}$.

Άσκηση 2/ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x+5$, μονοτονία, ακρότατα.

Λύση

Π.ορ $A=R$. Η f συνεχής στο R

και $f'(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$ για κάθε $x\in R$.

x		2	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

ή $f \nearrow$ σε όλο το R

και δεν έχει ακρότατα

Άσκηση 3/ $f(x)=ημx-x$ μονοτονία, ακρότατα.

Λύση Η f συνεχής στο R ως π.σ.σ.

και $f'(x)=συνx-1$ για κάθε $x\in R$.

γνωρίζω $-1\leq συνx\leq 1$ άρα $συνx-1\leq 0$ για κάθε $x\in R$

$f'(x)\leq 0$ και αφού μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία.

$(0, 2\pi, 4\pi, \ldots)$ άρα

η $f \searrow$ σε όλο το R.

και δεν έχει ακρότατα

Άσκηση 4/ $f(x)=x\cdot\sqrt{4-x^2}$. Μονοτονία, ακρότατα

Π. ορισμού $A=[-2,2]$ η f συνεχής στο $[-2,2]$.

και $f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ για κάθε $x\in(-2,2)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	ΤΜ		ΤΕ		ΤΜ		ΤΕ

για $x\in[-2,-\sqrt{2}]$ η $f \searrow$

για $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ η $f \nearrow$

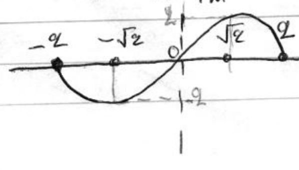
για $x\in[\sqrt{2},2]$ η $f \searrow$

για $x=-2$ έχει Τ. μεγ. το $f(-2)=0$

για $x=-\sqrt{2}$ έχει Τ.Ε το $f(-\sqrt{2})=-2$

για $x=\sqrt{2}$ έχει Τ.Μ το $f(\sqrt{2})=2$

για $x=2$ έχει Τ.Ε το $f(2)=0$



Άσκηση 5) $f(x) = x-2 + \frac{1}{x-2}$ Μονοτ., ακρότατα

Π.ορ. $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \in A$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

x	$-\infty$ … 1	1 … 2	2 … 3	3 … $+\infty$
$(x-1)$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ T.M	$\searrow$	$\searrow$ T.E.	$\nearrow$

για $x \in (-\infty, 1]$ η $f \nearrow$

για $x \in [1, 2)$ η $f \searrow$

για $x \in (2, 3]$ η $f \searrow$

για $x \in [3, +\infty)$ η $f \nearrow$

για $x = 1$ έχει T.M το $f(1) = -2$

για $x = 3$ έχει T.E το $f(3) = 2$.

Άσκηση 6) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{αν } x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{αν } x > 3 \end{cases}$

Να εξετάσεις την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Για $x < 3$ η f συνεχής.

για $x > 3$ η f συνεχής

για $x = 3$ είναι $f(3) = 3$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3$

άρα η f είναι συνεχής και στο 3.

άρα συνεχής στο R.

Για $x < 3$. $f'(x) = 2x - 2$.

Για $x > 3$ $f'(x) = 2$.

Για $x = 3$.

$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = 2$, $\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = 4$.

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)=\begin{cases}2x-2\\2\end{cases}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$		$\nearrow$	

για $x \in (-\infty, 1]$ η $f \searrow$
για $x \in [1, +\infty)$ η $f \nearrow$
για $x = 1$ έχει ο. ελαχ. το $f(1) = -1$.

Β| ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 7 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \beta x^2 + 4x + 2$.

Να βρεθεί η τιμή του $\beta \in R$ ώστε η f να είναι $\nearrow$ σε όλο το R.

Λύση.

Π.ορ $A = R$.
$f'(x) = x^2 - 2\beta x + 4$. για κάθε $x \in R$.
Για να είναι η $f \nearrow$ στο R πρέπει $f'(x) \geq 0$. για κάθε $x \in R$. και για να συμβαίνει αυτό πρέπει. $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\beta)^2 - 4\cdot1\cdot4 \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 \leq 4 \Leftrightarrow |\beta| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta \leq 2$.

Άσκηση 8 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \alpha^2 x^2 + \alpha x - 3$.

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ ώστε η f να έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$.

Λύση

Π.ορ. $A = R$.
$f'(x) = x^2 - 2\alpha^2 x + \alpha$. για κάθε $x \in R$.
Η f είναι συνεχής στο R. και υπάρχει η παράγωγος για κάθε $x \in R$ άρα. η f θα έχει ακρότατο στο x_0 αν ισχύει $f'(x_0) = 0$ και αλλάζει πρόσημο η f' εκατέρωθεν το x_0.
Άρα πρέπει $f'(1) = 0$ και να αλλάζει πρόσημο η f' εκατέρωθεν του 1.

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 1-2\alpha^2+\alpha=0 \Leftrightarrow 2\alpha^2-\alpha-1=0 \begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Για $\alpha=1$ έχω

$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$ άρα η $f\nearrow$ στο R

άρα δέν έχει ακρότατα άρα η τιμή $\underline{\alpha=1 \text{ απορ.}}$

Για $\alpha=-\frac{1}{2}$ έχω:

$f'(x)=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$

$\boxed{\text{άρα για } \alpha=-\frac{1}{2} \text{ η } f \text{ έχει ακρότατο στο } x_0=1.}$

Γ] <u>ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>
<u>ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $f(x)=0$, $f(x)=\alpha$.</u>
<u>ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ.</u>

9) $f(x)=x^3-6x^2+2$

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=10$.

Λύση.

α) Π. ορ. $A=R$.

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$ για κάθε $x\in R$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$.

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$

Για $x \in A_1 = (-\infty, 0]$ η f συνεχής και $\nearrow$ άρα Σύνολο Τιμών
$f(A_1) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)] = (-\infty, 2]$.

Για $x \in A_2 = [0,4]$ η f συνεχής και $\searrow$ άρα Σύνολο Τιμών
$f(A_2) = [f(4), f(0)] = [-30, 2]$.

Για $x \in A_3 = [4, +\infty)$ η f συνεχής και $\nearrow$ άρα Σύνολο Τιμών
$f(A_3) = [f(4), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [-30, +\infty)$.

Άρα ολικό σύνολο τιμών $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = (-\infty, +\infty) = R$.

β) Ελέγχω αν το 0 ανήκει σε κάθε ένα από τα επιμέρους σύνολα τιμών στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη.

Παρατηρώ ότι $0 \in f(A_1)$, $0 \in f(A_2)$, $0 \in f(A_3)$
άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες.
μία στο A_1, μία στο A_2, μία στο A_3
δηλαδή μία αρνητική στο $(-\infty, 0)$
δύο θετικές μία στο $(0,4)$ και μία στο $(4, +\infty)$.

γ) Ελέγχω αν το 10 ανήκει σε κάθε ένα από τα επιμέρους σύνολα τιμών.
Παρατηρώ ότι $10 \in f(A_3)$
άρα η εξίσωση $f(x) = 10$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $A_3 = (4, +\infty)$.

Δ/ Εύρεση πλήθους ριζών παραμετρικής εξίσωσης της μορφής $f(x)=\alpha$.
(αν δεν είναι στη μορφή $f(x)=\alpha$ την μετατρέπω ώστε να έχει αυτή τη μορφή)

Άσκηση. 10/ Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3=3x+\alpha$. για κάθε τιμή του $\alpha\in R$.

Λύση.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $x^3-3x=\alpha$. $\Leftrightarrow f(x)=\alpha$.
Αν θέσω $f(x)=x^3-3x$. για κάθε $x\in R$.
$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ για κάθε $x\in R$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$	$\nearrow$	ΤΕ $\searrow$	ΤΜ $\nearrow$	

Για $x\in A_1=(-\infty,-1]$ η $f\nearrow$ και συνεχής. άρα Σ. Τιμών.
$f(A_1)=(\lim_{x\to-\infty}f(x), f(-1)]=(-\infty,2]$.

Για $x\in A_2=[-1,1]$ η $f\searrow$ και συνεχής άρα Σ. Τιμών.
$f(A_2)=[f(1),f(-1)]=[-2,2]$.

Για $x\in A_3=[1,+\infty)$ η $f\nearrow$ και συνεχής άρα. Σ. Τιμών
$f(A_3)=[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x))=[-2,+\infty)$.

Για να έχει η εξίσωση ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2, A_3 στα οποία είναι γνησίως μονότονη αρκεί το α να ανήκει στα $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$

α) Αν $\alpha<-2$ τότε $\alpha\in f(A_1)$. άρα η εξίσωση έχει μία ρίζα στο A_1.

β) Αν $-2<\alpha<2$ τότε $\alpha \in f(A_1), f(A_2), f(A_3)$ άρα η εξίσωση έχει τρείς ρίζες μια στο A_1 μια στο A_2, μια στο A_3.

γ) Αν $\alpha > 2$ τότε. $\alpha \in f(A_3)$ οπότε η εξίσωση. έχει μια ρίζα στο A_3.

δ) Αν $\boxed{\alpha=-2}$ τότε $\alpha \in f(A_1)$, $\alpha \in f(A_2)$, $\alpha \in f(A_3)$.
Επειδή όμως $f(1)=-2$. η ρίζα στα. A_2, A_3 είναι κοινή και είναι το 1.
ενώ στο A_1 είναι διαφορετική άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες.

ε) Αν $\alpha=2$. τότε. το $\alpha \in f(A_1), f(A_2), f(A_3)$.
Επειδή όμως $f(-1)=2$ η ρίζα στα. A_1, A_2 είναι η ίδια δηλαδή το -1 και υπάρχει και μια άλλη στο A_3 άρα η εξίσωση έχει. 2 ρίζες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ.

1) $f(x) = x^3 \ln x$ Να εξετάσετε την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα.

2) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ Μονοτονία ακρότατα.

3) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ μονοτονία ακρότατα.

4) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$ μονοτονία ακρότατα.

5) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$ μονοτονία ακρότατα.

6) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (2\lambda-1)x^2 + \lambda^2 x + (4\lambda+4)x - 5\lambda + 10$
Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο R.

7) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$.
Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να έχει ακρότατα στο $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

8) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\alpha^2 x^2 - 4\alpha x$ $x \in R$
να βρεθούν οι τιμές του α ώστε η f να έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$

9) $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$ να βρεθούν τα α, β ώστε η f να έχει ακρότατο στο $x_0 = 2$ το 4.

10) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ να βρεθεί το
α) Σύνολο Τιμών της συνάρτησης και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$
β) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = e$

11) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 = 12x + \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$

ΜΑΘΗΜΑ 42.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ.

Α) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $A(x)=B(x)$.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $A(x)-B(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

Αν θέσω $f(x)=0$.

α) Αν η εξίσωση λύνεται με παραγοντοποίηση, τότε τη λύνω όπως γνωρίζω από προηγ. τάξεις

β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Π. ορισμού τότε έχει το πολύ μία ρίζα τη βρίσκω με δοκιμή οπότε η εξίσωση λύθηκε και έχει ακριβώς μία ρίζα.

β) αν η f έχει ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ το $f(x_0)=0$ και είναι

x		x_0	
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
		ΟΕ	

τότε έχει μοναδική ρίζα το x_0 αφού για $x<x_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$.

και για $x>x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$.

και για $x=x_0$ είναι $f(x_0)=0$.

ομοίως αν είναι $f(x_0)=0$ ολικό μέγιστο και

x		x_0	
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

τότε $f(x_0)=0$ μοναδική ρίζα το x_0.
αφού για $x<x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$
για $x>x_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0) \Leftrightarrow f(x)<0$

γ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη κατά διαστήματα, τότε βρίσκω τα επί μέρους σύνολα τιμών και εξετάζω αν το 0 ανήκει σε κάθε ένα σύνολο τιμών στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη οπότε βρίσκω το πλήθος των ριζών και στη συνέχεια με δοκιμή βρίσκω ποιές είναι οι ρίζες

Β) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(A(x))=f(B(x))$

αν η f είναι γνησ. μονότονη άρα και 1-1 τότε $A(x)=B(x)$ και στη συνέχεια όπως η περ. Α.

ΑΣΚΗΣΗ 1/ Να λυθεί η εξίσωση. $3^x+4^x=5^x$.

Λύση.

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $\frac{3^x}{5^x}+\frac{4^x}{5^x}=1 \Leftrightarrow$
$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$ για κάθε $x\in R$.

$f'(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x \ln(3/4)+\left(\frac{4}{5}\right)^x\cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right)<0$. για κάθε $x\in R$. άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και παρατηρώ ότι $f(2)=0$ άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 2.

ΑΣΚΗΣΗ 2/ Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+1}{e^x}=1$.

Λύση.

για κάθε $x\in R$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την
$\frac{x+1}{e^x}=1 \Leftrightarrow x+1=e^x \Leftrightarrow e^x-x-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=e^x-x-1$ για κάθε $x\in R$.

είναι $f'(x)=e^x-1$ για κάθε $x\in R$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

για $x=0$ η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$
για $x<0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.
για $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.
άρα η f έχει μοναδική ρίζα το $x=0$.

Ασκηση 3/ Να λυθεί η εξίσωση.
$e^{\text{συν}x}-e^{\text{ημ}x}=\text{ημ}x-\text{συν}x$.

Η εξίσωση για κάθε $x\in R$ ισοδύναμα γράφεται.
$e^{\text{συν}x}+\text{συν}x=e^{\text{ημ}x}+\text{ημ}x \Leftrightarrow f(\text{συν}x)=f(\text{ημ}x)$ αν θέσω $f(x)=e^x+x$. $\forall x\in R$.
είναι $f'(x)=e^x+1>0$ άρα η $f \nearrow \forall x\in R$.
οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται
$f(\text{συν}x)=f(\text{ημ}x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \text{συν}x=\text{ημ}x \Leftrightarrow \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}=1 \Leftrightarrow$
$\text{εφ}x=1 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\pi/4$.

Γ) ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

α) Αν η f είναι συνεχής (όχι δίκλαδη) τότε βρίσκω τις ρίζες της και σε κάθε διάστημα θα διατηρεί πρόσημο οπότε με δοκιμή βρίσκω το πρόσημο της f σε κάθε ένα διάστημα που οι ρίζες χωρίζουν το Π. ορισμού

β) Αν η f είναι συνεχής και $\nearrow$ και $f(x_0)=0$ τότε.

x		x_0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

γ) Αν η f είναι συνεχής και $\searrow$ και $f(x_0)=0$ τότε.

x		x_0	
$f(x)$	$+$	0	$-$

δ) Αν η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(x_0)=0$ και είναι

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

τότε $\Longrightarrow$

x		x_0	
$f(x)$	$+$	0	$+$

$f(x)\geq 0$. και μηδενίζεται μόνο στο x_0.

ε) Αν η f έχει ολικό μέγιστο το $f(x_0)=0$ και είναι

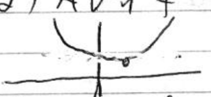
x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

τότε.

x		x_0	
$f(x)$	$-$	0	$-$

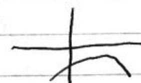
$f(x)\leq 0$ και μηδενίζεται μόνο στο x_0.

ζ) Αν η f έχει ολικό ελάχιστο ένα θετικό αριθμό θ.



τότε $f(x)\geq\theta>0$ άρα $f(x)>0$

η) Αν η f έχει ολικό μέγιστο ένα αρνητικό αριθμό α.



τότε $f(x)\leq\alpha<0$ άρα $f(x)<0$

Άσκηση 4) $f(x)=\sqrt{x}-x$. να βρεθεί το πρόσημο.

Λύση Π. ορισμού $A_f=[0,+\infty)$. η f συνεχής στο A_f

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=x \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=x^2 \Leftrightarrow$

$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

x	0		1		$+\infty$
Δοκιμή		$f(1/4)=1/4$	0	$f(4)=-2<0$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Άσκηση 5/ $f(x) = \ln x + x - 1$. Να βρεθεί το πρόσημο

Λύση Π. ορισμού $A_f = (0,+\infty)$ η f συνεχής στο A_f.
Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ άρα
η $f \nearrow$ στο $(0,+\infty)$. Παρατηρώ ότι $f(1) = 0$
άρα η f έχει μοναδική ρίζα το 1. οπότε

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

αφού $f(1) = 0$
για $x < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < 0$
για $x > 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Άσκηση 6/ $f(x) = \ln x - x + 1$. Πρόσημο;

Λύση Π. ορισμού $A_f = (0,+\infty)$ η f συνεχής στο A_f.
Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ για κάθε $x \in A_f$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0 M	$\searrow$	

για $x = 1$ η f έχει ολικό μέγιστο το $f(1) = 0$
για $x < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$
για $x > 1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

άρα πρόσημο

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Άσκηση 7/ $f(x) = e^x - x + 2$. Πρόσημο;

Λύση. Π. ορισμού $A = \mathbb{R}$ η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Και παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	O.E	$\nearrow$

Για $x = 0$ η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 3 > 0$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 3 > 0$ άρα $f(x) > 0$.

Άσκηση 10/

Άσκηση 11/

Δ/ Λύση ανισώσεων της μορφής $A(x) > B(x)$
$\Leftrightarrow A(x) - B(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ αν θέσω
$f(x) = A(x) - B(x)$.
Βρίσκω το πρόσημο της $f(x)$ και βρίσκω
τις τιμές του x ώστε $f(x) > 0$.

Ε/ Λύση Ανισώσεων της μορφής $f(A(x)) < f(B(x))$
Βρίσκω της μονοτονία της f.
και αν η $f \nearrow$ τότε η ανίσωση $\Leftrightarrow A(x) < B(x)$. κτλ.
αν η $f \searrow$ τότε η ανίσωση $\Leftrightarrow A(x) > B(x)$ κτλ.

Άσκηση 8/ Να λυθεί η ανίσωση. $\dfrac{e - \ln x}{e^x} < 1$.

Λύση.

για κάθε $x > 0$ η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την
$e - \ln x < e^x \Leftrightarrow e^x + \ln x - e > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ αν θέσω.
$f(x) = e^x + \ln x - e$.
Π. ορισμο $A = (0, +\infty)$ η f συνεχής στο A ως π.σ.σ.
και παραγωγ. με $f'(x) = e^x + 1/x > 0$ άρα η $f \nearrow$ στο $(0, +\infty)$
Παρατηρώ ότι $f(1) = 0$ άρα το 1 μοναδική ρίζα
για $x < 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$
για $x > 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

άρα πρόσημο της f

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

άρα η ανίσωση $f(x) > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in (1, +\infty)$
άρα και η ισοδύναμη αρχική

Άσκηση 9/ Να λυθεί η ανίσωση.
$$2^{\ln^2 x} - 2^{\ln x} < \ln x - \ln^2 x.$$

Λύση

Για κάθε $x > 0$ η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται
$2^{\ln^2 x} + \ln^2 x < 2^{\ln x} + \ln x \Leftrightarrow f(\ln^2 x) < f(\ln x)$.

Αν θέσω $f(x)=2^x+x$. ; $x\in R$.
Η f συνεχής στο R ως πράξ. συν. συναρ. και παραγωγ.
με $f'(x)=2^x\cdot \ln 2+1>0$ άρα η $f\nearrow$ στο R
άρα η ανίσωση $f(\ln^2 x)<f(\ln x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln^2 x<\ln x$.

$\Leftrightarrow \ln x(\ln x-1)<0$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln^2 x-\ln x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα. $x\in(1,e)$.

A.10 $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$. μονοτονία, ακρότατα;

Λύση

Π. ορισμού της f είναι $A=R$.
Η f συνεχής στο R. ως πράξ. συνεχ. συναρτ. και παραγ.
στο R με $f'(x)=e^x-x-1$
βρίσκω το πρόσημο της f'.
η f' συνεχής στο R και παραγωγίσιμη με
$f''(x)=e^x-1$. άρα
είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

η f' έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$. άρα.
Πρόσημο της f' είναι

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$

δηλαδή $f'(x)\geq 0$ και μηδενίζεται μόνο για $x=0$.

Οπότε

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν έχει ακρότατα.

A. 11 $f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$ μονοτονία ακρότατα.

Ασκήσεις.

1) Να λυθεί η εξίσωση $5e^x+3x-5=0$
2) Να λυθεί η εξίσωση $4\ln x+5x-5=0$
3) Να λυθεί η εξίσωση $2^x+3^x=5^x$
4) Να λυθεί η εξίσωση $2\ln x-x+1=0$
5) Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{2+2013x}{2e^x}=1$

6) i) Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)=4e^x+5x-4$
ii) Να βρεθεί η μονοτονία της $g(x)=4e^x+\frac{5}{2}x^2-4x+2012$
7) i) Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)=2e^x-2x+5$
ii) Να βρεθεί η μονοτονία της $g(x)=2e^x-x^2+5x-4$
8) i) Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)=x-\ln x-1$
ii) Αν $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$ να δείξετε $g'(x)=\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$
και να βρεθεί η μονοτονία της g
9) i) $f(x)=5^x+3x$ μονοτονία.
ii) Να λυθεί η εξίσωση $5^{\ln^3 x}-5^{\ln x}=3(\ln x-\ln^3 x)$
iii) Να λυθεί η ανίσωση $5^{\sigma\upsilon\nu x}-5^{\eta\mu x}<3(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$
10) Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{e^x}-\sqrt{2^x}=5(2^x-e^x)$
11) Να λυθεί η ανίσωση $e^{1-\ln^2 x}-e^{1-\ln x}<3(\ln^2 x-\ln x)$
12) Να λυθεί η ανίσωση $e^{2-x}-3x+5<0$
13) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{4x+1}{e^{5x}}<1$

ΜΑΘΗΜΑ 43.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ. ΠΡΟΣΗΜΟ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Α. Για να δείξω μια ανισότητα της μορφής.
$A(x) \geq B(x) \Leftrightarrow A(x)-B(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ δείχνω.
ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Άσκηση 1 Να δείξετε για κάθε $x \in R$ ότι ισχύει $e^x \geq xe$.

Λύση.

Έστω $f(x)=e^x-xe$. Π. ορ. $A=R$ η f συνεχής στο R.
και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x-e$. είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.
άρα.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ΟΕ.	$\nearrow$	

η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=0$.
άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει
$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x-ex \geq 0 \Leftrightarrow$
$\boxed{e^x \geq ex}$.

Β. Για να δείξω μια ανισότητα. της μορφής
$A(x) > B(x)$ για κάθε $x \in$ Π. ορ της f.
$\Leftrightarrow A(x)-B(x) \Leftrightarrow f(x)>0$. δείχνω ότι
η f έχει ολικό ελάχιστο έναν θετικό αριθμό

Άσκηση 2 Να δείξετε για κάθε $x \in R$. ότι
ισχύει $\dfrac{x-2}{e^x}<1$.

Λύση.

Αρκεί να δείξω $\dfrac{x-2}{e^x}<1 \Leftrightarrow x-2<e^x \Leftrightarrow e^x-x+2>0$.
Έστω $f(x)=e^x-x-2$. η f συνεχής στο R. και
Παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x-1$. άρα

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

η f έχει ολικό ελάχιστο. το $f(0)=3$
άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει
$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 3 > 0$ άρα.
$f(x)>0 \Leftrightarrow e^x-x+2>0 \Leftrightarrow e^x>x-2 \Leftrightarrow$
$\dfrac{x-2}{e^x}<1$ για κάθε $x \in R$.

Γ) Για να δείξω ότι για κάθε $x \lessgtr \alpha$ ισχύει $A(x) \lessgtr B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) \lessgtr 0 \Leftrightarrow f(x) \lessgtr 0$

Βρίσκω την μονοτονία της f και:

- για $x < \alpha$. αν η $f \nearrow$ τότε $f(x) < f(\alpha) \Leftrightarrow f(x) < 0$
  αν η $f \searrow$ τότε $f(x) > f(\alpha) \Leftrightarrow f(x) > 0$.
- ή αν $x > \alpha$ και $f \nearrow$ τότε $f(x) > f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) > 0$
  και $f \searrow$ τότε $f(x) < f(\alpha) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Άσκηση 3/ Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει $ημx < x$. Λύση

Έστω $f(x) = x - ημx$. η f έχει π. ορ το $A = R$. είναι συνεχής και παραγ. στο R, με
$f'(x) = 1 - συνx \geq 0$ και μηδενίζεται σε μεμωνομένα σημεία
άρα η $f \nearrow$ στο R.
άρα για $x > 0 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow x - ημx > 0 \Leftrightarrow$
$x > ημx$

Άσκηση 4/ Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$. ισχύει. $e^x > 1 - \sqrt{x}$.

Λύση.

Έστω $f(x) = e^x + \sqrt{x} - 1$. η f έχει π. ορ το $A = [0, +\infty)$
είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγ. στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ οπότε $f \nearrow$ στο A.
άρα για $x > 0 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x + \sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow$
$e^x > 1 - \sqrt{x}$.

Άσκηση 5/ για κάθε $x > 0$ να δείξετε.
$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Λύση

Έστω $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Η f έχει π. ορ το $A = R$
είναι συνεχής στο R ως πράξ. συν. συναρ και παραγ. με $f'(x) = e^x - 1 - x$.

Η f' είναι Παραγ στο R ως π.π.σ με.
$f''(x) = e^x - 1$. η f'' είναι παραγωγίσιμη στο R με.
$f'''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in R$.

$f'''(x) > 0 \Rightarrow \overset{\text{άρα}}{f''} \nearrow$ οπότε για $x > 0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow$

$f''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα η $f' \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.
οπότε για $x > 0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow$

$f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα η $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$
οπότε για $x > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow$
$e^x - x - 1 - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{x^2}{2} + x + 1$.

Δ| Για να δείξω ανισότητες της μορφής $f(\alpha) \lesseqgtr f(\beta)$ βρίσκω τη μονοτονία της f
και αν $\alpha < \beta$ και η $f \nearrow$ τότε $f(\alpha) < f(\beta)$
αν $\alpha < \beta$ και η $f \searrow$ τότε $f(\alpha) > f(\beta)$.

Άσκηση 6| Να δείξετε $4 \ln\pi > \pi \ln 4$

λύση.

Είναι $4\ln\pi > \pi \ln 4 \Leftrightarrow \frac{\ln\pi}{\pi} > \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow f(\pi) > f(4)$
αν θέσω $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Έστω $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ έχει π. ορ $A = (0, +\infty)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πρ. σ.σ και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$.

άρα

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

αφού $\pi < 4$ και ανήκουν στο $(e, +\infty)$ στο οποίο η $f \searrow$ τότε $f(\pi) > f(4) \Leftrightarrow \frac{\ln\pi}{\pi} > \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow$
$4\ln\pi > \pi\ln 4$.

Άσκηση 7/ Έστω $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$.

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f

β) Αν $1<\alpha<\beta$ να δείξετε $\dfrac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}} < \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha\beta}$.

Λύση.

Π.ορ της f είναι $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Η f συνεχής στο A ως πρ. σ.σ. και παραγωγίσ. στο A ως πρ. π. σ. με:

$$f'(x)=\frac{(x\ln x)'(x-1)-(x\ln x)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x\ln x-\ln x+x-1-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}.$$

Έστω $g(x)=x-\ln x-1$ θα βρώ το πρόσημο της g.

Π.ορ της g είναι $A_g=(0,+\infty)$

$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ για κάθε $x\in A_g$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

Η g έχει ολικό ελάχιστο το $g(1)=0$

άρα $g(x)\geq g(1) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα για την f έχω:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Άρα

για $x\in(0,1)$ η f $\nearrow$

για $x\in(1,+\infty)$ η f $\nearrow$

και δεν έχει ακρότατα.

β) Αφού $\alpha<\beta$ και ανήκουν στο $(1,+\infty)$ στο οποίο η f είναι $\nearrow$ θα ισχύει $f(\alpha)<f(\beta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\ln\alpha}{\alpha-1} < \frac{\beta\ln\beta}{\beta-1} \overset{\alpha>1,\,\beta>1}{\Longleftrightarrow} (\beta-1)\cdot\alpha\ln\alpha < \beta(\alpha-1)\ln\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\alpha^{(\beta-1)\alpha} < \ln\beta^{\beta(\alpha-1)} \Leftrightarrow \alpha^{\alpha\beta-\alpha} < \beta^{\alpha\beta-\beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^{\alpha\beta}}{\alpha^{\alpha}} < \frac{\beta^{\alpha\beta}}{\beta^{\beta}} \Leftrightarrow \frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}} < \frac{\alpha^{\alpha\beta}}{\beta^{\alpha\beta}} \Leftrightarrow \frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}} < \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha\beta}.$$

Ε| Μέγιστη ή Ελάχιστη Τιμή Ακροτάτου | με παράμετρο.

Άσκηση 8|

Έστω $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$

α) Να βρεθεί το ακρότατο της f

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το ακρότατο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή.

Λύση

Π. ορ. της f $A = \mathbb{R}$.

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγ. ως π.π.σ. με $f'(x) = e^x - \lambda$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda = 0 \Leftrightarrow e^x = \lambda \Leftrightarrow \ln e^x = \ln\lambda \Leftrightarrow x\ln e = \ln\lambda \Leftrightarrow x = \ln\lambda$.

x		$\ln\lambda$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	Ο.Ε	↗

για $x = \ln\lambda$ η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(\ln\lambda) = e^{\ln\lambda} - \lambda\ln\lambda = \lambda - \lambda\ln\lambda$.

Έστω $g(\lambda) = \lambda - \lambda\ln\lambda$. Θα βρω τη μέγιστη τιμή της g. Π. ορ. $A_g = (0, +\infty)$

Η g συνεχής στο A_g ως π.σ.σ και παραγ. με $g'(\lambda) = 1 - (\ln\lambda + 1) = -\ln\lambda$.

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

λ	0		1		$+\infty$
$g'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
$g(\lambda)$		↗	Ο.Μ.	↘	

άρα για $\lambda = 1$ η g έχει ολικό μέγιστο το $g(1) = 1$.

άρα για $\lambda = 1$ το ακρότατο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή που είναι το $g(1) = 1$

ΑΝΙΣΩΣΗ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\Longrightarrow$ ΑΝΙΣΩΣΗ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

Ζ| Παραμετρικές ανισότητες

Άσκηση 9

Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του $\lambda \in R$ ώστε να ισχύει $e^x \geq \lambda x$, $\lambda > 0$

Λύση

Έστω $f(x) = e^x - \lambda x$.

σύμφωνα με την άσκηση 8 η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(\ln\lambda) = \lambda - \lambda\ln\lambda$.

οπότε.

$e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x \in R \Leftrightarrow$

$\text{ελαχ} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(\ln\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$\lambda(1 - \ln\lambda) \geq 0 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow} 1 - \ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\lambda \leq \ln e \Leftrightarrow \lambda \leq e$. άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ είναι $\lambda = e$.

Άσκηση 10 Αν $e^x \geq \alpha x + \beta$ για κάθε $x \in R$, $\alpha, \beta > 0$. Να δείξετε $\alpha^\alpha \leq e^{\alpha\beta}$.

Λύση

Έστω $f(x) = e^x - \alpha x - \beta$. Π.ορ. $A = R$.

η f συνεχής στο R ως π.σ.σ. και παραγωγ. στο R με $f'(x) = e^x - \alpha$

είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \ln\alpha$.

x		$\ln\alpha$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(\ln\alpha) = e^{\ln\alpha} - \alpha\ln\alpha - \beta$
$= \alpha - \alpha\ln\alpha - \beta$.

Αφού $e^x \geq \lambda x + \beta$ για κάθε $x \in R \Leftrightarrow$

$e^x - \lambda x - \beta \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R \Leftrightarrow$

$\min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha - \alpha\ln\alpha - \beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha - \beta \geq \alpha\ln\alpha \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha \leq \alpha - \beta \Leftrightarrow \ln\alpha^\alpha \leq \alpha - \beta$

$\Leftrightarrow \ln\alpha^\alpha \leq \ln e^{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \alpha^\alpha \leq e^{\alpha-\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να δείξετε $\ln x \le x-1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$
2) Να δείξετε $e^x \ge 5x+5$ για κάθε $x \in R$.
3) Να δείξετε $e^x \ge x^e$, $x>0$
4) Να δείξετε $\frac{x+1}{e^x} \le 1$ για κάθε $x \in R$.
5) Να δείξετε $x+1 \le e^x \le xe^x+1$, $x \in R$.
6) Να δείξετε $e^{3x} > 3x-1$ για κάθε $x \in R$.
7) Να δείξετε για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $\ln x < x+1$
8) Να δείξετε ότι για κάθε $x<0$ ισχύει $\eta\mu x > x$
9) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x < x+1$.
10) Να δείξετε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει $\ln(x-1) < x-2$
11) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\eta\mu x > x-\frac{x^3}{3}$
12) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $e^x > 1+\ln(x+1)$
13) $f(x) = x - \pi\ln x$. i) Να μελετηθεί η μονοτονία της f
ii) Να δείξετε $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$
14) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x>0$ i) Να βρεθεί η μονοτονία της f
ii) Να δείξετε $2^e < e^2$ και $e^3 > 3^e$.
15) $f(x) = xe^x + x$ i) Να δείξετε ότι η $f \nearrow$ για $x \ge -2$.
ii) Να δείξετε ότι αν $\alpha > \beta > -2$ τότε $\alpha e^\alpha - \beta e^\beta < \beta - \alpha$
16) Να δείξετε ότι για κάθε $x \ge 0$ ισχύει $2\sigma\upsilon\nu x \ge 2-x^2$.
17) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ i) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f
ii) Αν $1<\alpha<\beta$ να δείξετε $\beta\alpha^\beta > \alpha\beta^\alpha$
18) $f(x) = x^2 - 2x + \ln\alpha - \alpha$, $\alpha>0$, $x \in R$
i) Να βρεθεί το ακρότατο της f ως συνάρτηση του α.
ii) Να βρεθεί ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή του ακροτάτου και για ποια τιμή του α παίρνει τη μέγιστη τιμή
19) $f(x) = e^{\alpha x} - \alpha x + \alpha - e^\alpha$, $\alpha>0$, $x \in R$
i) Να βρεθεί το ακρότατο της f ως συνάρτηση του α.
ii) Να βρεθεί ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή του ακροτάτου και για ποια τιμή του α παρουσιάζεται αυτή
20) Αν $x^2 \ge 2x - \ln\alpha + \beta$ για κάθε $x \in R$ και $\alpha>0$ τότε
να δείξετε $\alpha \ge e^{\beta-1}$