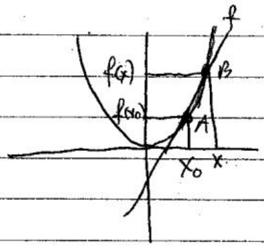
ΜΑΘΗΜΑ 28.

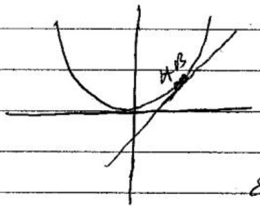
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f στο x_0

• Η έννοια της παραγώγου:



Αν έχω την γραφική παράσταση μιας συνάρτηση f και ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ τότε. Για κάθε σημείο $B(x, f(x))$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$.

Έστω ότι το $x \to x_0$ τότε το σημείο B πλησιάζει το A.



οπότε η ευθεία AB τείνει να γίνει εφαπτομένη στη γραφ. παράσταση της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\lambda_{εφ} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης τον ονομάζω παράγωγο της f στο x_0 και τον συμβολίζω με $f'(x_0)$.

• Άρα $$f'(x_0) = \lambda_{εφ} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Για το $f'(x_0)$ χρησιμοποιούνται τα εξής ονόματα.

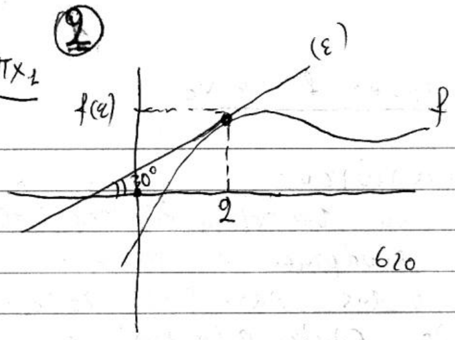
$f'(x_0)$ →
- Παράγωγος της f στο x_0.
- ρυθμός μεταβολής της f στο x_0.
- κλίσης της f ή της C_f στο x_0.
- συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

• Αν θέσω $x - x_0 = h \Rightarrow x = x_0 + h$ τότε $h \to 0$

και $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

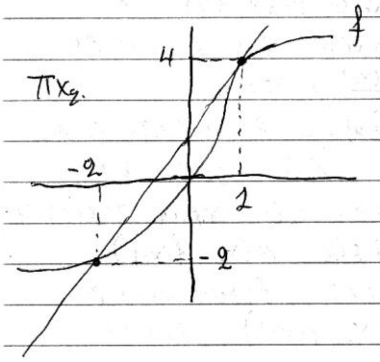
2

Πχ1



Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) έχει συντελ. διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και είναι εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ άρα $f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Πχ2.



Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$

και είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ άρα $f'(1) = 2$

- Παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0.

Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το αριθμό αυτόν τον ονομάζω παράγωγο της f στο x_0 (δηλαδή όταν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$).

- Αν το x_0 είναι σημείο αλλαγής τύπου τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν υπάρχουν $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ίσα μεταξύ τους

Άρα $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = \ell$.

• **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ.**

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Απόδειξη

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)$

$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$. άρα $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

άρα η f συνεχής στο x_0.

• Άμεση συνέπεια: Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}$ Να εξετάσετε με τον ορισμό αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=6$ και στο $x_0=2$.

Λύση. Είναι π.ορ. της f $A=[2,+\infty)$

i) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{(x-6)}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4}$ άρα $f'(6)=\frac{1}{4}$.

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}}{(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim\frac{(x-2)}{(x-2)\sqrt{x-2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Να εξετάσετε αν η f είναι παραγ. στο $x_0=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 ημ\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\, ημ\frac{1}{x}\right) = 0$

αφού $\left|x\, ημ\frac{1}{x}\right| = |x|\cdot\left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq |x|\cdot 1 = |x|$. άρα

$-|x| \le x\,ημ\frac{1}{x} \le |x|$.

και αφού $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$ τότε και $\lim_{x\to 0}(x\,ημ\frac{1}{x}) = 0$

άρα η f παραγ. στο 0 με $f'(0)=0$.

③ $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & αν\ x>1 \\ 2x+3 & αν\ x \le 1 \end{cases}$ Να εξετάσετε αν είναι παραγωγ. στο $x_0=1$.

ΛΥΣΗ.

Επειδή το 1 είναι σημείο αλλαγής τύπου παίρνω πλευρικά όρια. είναι $f(1)=5$

- $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+4-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$.
- $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x+3-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{(x-1)} = 2$.

άρα $f'(1)=2$.

④ Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) - 4f(x)\,ημx + 4x^2 = 0$ ① και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ να υπολογίσετε $f(0)$, $f'(0)$

Λύση

- Για $x=0$ η ① γίνεται $f^2(0) - 4f(0)\cdot ημ0 + 4\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$ $f^2(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

- για $x\ne 0$ η ① γίνεται $\frac{f^2(x)}{x^2} - 4\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{ημx}{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - 4\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{ημx}{x} + 4 = 0$. ②

Αφού η f παραγωγίσιμη στο 0 θα υπάρχει $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \ell$ και θα είναι πραγ. αριθμός

Άρα έχω $\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - 4\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{ημx}{x} + 4\right] = \lim_{x\to 0} 0 \Leftrightarrow$

$\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^2 - 4\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x} + \lim_{x\to 0}4 = 0 \Leftrightarrow$

$\ell^2 - 4\ell \cdot 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\ell-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 2.$

άρα $f'(0) = 2$.

(5) Αν $ημ^2x - x^4 \le x f(x) \le ημ^2 x + x^4$ (1) για κάθε $x \in R$.
και η f είναι συνεχής στο R.
Να υπολογίσετε i) $f(0)$, ii) $f'(0)$.

Λύση

Αφού η f συνεχής στο R θα είναι και συνεχής στο 0.
άρα θα ισχύει $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$
αρκεί να υπολογίσω το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

Για $x>0$ η (1) γίνεται $\frac{ημ^2 x}{x} - x^3 \le f(x) \le \frac{ημ^2 x}{x} + x^3$.

είναι $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημ^2 x}{x} - x^3\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημx}{x}\cdot ημx - x^3\right) = 1\cdot 0 - 0 = 0$

και $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημ^2 x}{x} + x^3\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημx}{x}\cdot ημx + x^3\right) = 1\cdot 0 + 0 = 0$

άρα και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ δηλαδή $f(0) = 0$.

Είναι $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ αν είναι πραγμ. αριθμός

Για $x \neq 0$ η (1) γίνεται (διαιρώ με $x^2 \neq 0$).

$\frac{ημ^2 x}{x^2} - x^2 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{ημ^2 x}{x^2} + x^2$

Είναι $\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημ^2 x}{x^2} - x^2\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 - x^2\right) = 1 - 0 = 1$

και $\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημ^2 x}{x^2} - x^2\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 + x^2\right) = 1 + 0 = 1$

άρα και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 \in R$ άρα $f'(0) = 1$.

⑥

⑥ Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $f'(2)=0$. και $g(x)=\begin{cases} f(x+1) & \alpha\nu\ x\le 1 \\ f(3x-1) & \alpha\nu\ x>1 \end{cases}$

Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1

Λύση

Αφού η f παραγ. στο $2 \Rightarrow$ θα ισχύει

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$

Είναι $\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x+1)-f(2)}{x-1}=\lim_{y\to 2^-}\frac{f(y)-f(2)}{y-2}=f'(2)=0$

(θέτω $y=x+1 \Leftrightarrow x=y-1$, τότε $y\to \lim_{x\to 1^-}(x+1)=2^-$)

και $\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(3x-1)-f(2)}{x-1}=\lim_{y\to 2^+}\frac{f(y)-f(2)}{\frac{y+1}{3}-1}$

(θέτω $y=3x-1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{3}$, τότε $y\to \lim_{x\to 1^+}(3x-1)=2^+$)

$=\lim_{y\to 2^+}\frac{f(y)-f(2)}{\frac{y-2}{3}}=$

$=3\lim_{y\to 2^+}\frac{f(y)-f(2)}{y-2}=3\cdot 0=0$

άρα $g'(1)=0$

⑦ Αν $f(x)=\sqrt{x}\cdot\eta\mu x$ Να δείξετε ότι $f'(0)=0$.

Λύση. Π. ορ. της f. $A=[0,+\infty)$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)$

$=0\cdot 1=0$. άρα $f'(0)=0$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΛΛΟ ΤΥΠΟ.

⑧ Αν $f(2+h)=5+2h^2+\eta\mu h$. Να βρεθεί $f(2)$, $f'(2)$

Λύση

για $h=0$ είναι $f(2)=5$

και $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5+2h^2+\eta\mu h-5}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+\eta\mu h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2h+\frac{\eta\mu h}{h}\right)=2\cdot 0+1=1$

άρα $f'(2)=1$.

9) Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + \text{ημ}x\,\text{ημ}y$ (1) και η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για $x = y = 0$ η (1) γίνεται $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ και αφού η f συνεχής στο 0 θα είναι $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Είναι $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + f(h) + \text{ημ}\cdot h - \cancel{f(x_0)}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + \text{ημ}\,h}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} - \frac{\text{ημ}\,h}{h} \right) =$

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} - \frac{\text{ημ}\,h}{h} \right) = f'(0) - 1 = f'(0) - 1 \in \mathbb{R}$

άρα $f'(x_0) = f'(0) - 1$ άρα η f παραγ. στο x_0.

---

10) Αν $f'(x_0) = \ell$. Να υπολογίσετε τα όρια.

α) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h}$ β) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-3h) - f(x_0)}{h}$

γ) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0-3h)}{h}$

Λύση

α) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{x - x_0}{2}} = 2 \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2 f'(x_0) = 2\ell$

(θέτω $x = x_0 + 2h \Leftrightarrow h = \frac{x - x_0}{2}$ τότε $x \to \lim_{h \to 0}(x_0 + 2h) = x_0$.)

β) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-3h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{x - x_0}{-3}} = -3 \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

$= -3 f'(x_0) = -3\ell$

θέτω $x = x_0 - 3h \Leftrightarrow h = \frac{x - x_0}{-3}$

τότε $x \to \lim_{h \to 0}(x_0 - 3h) = x_0$.

⑧

γ) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)-f(x_0)+f(x_0)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h} \right] = 2\ell-(-3\ell) = 5\ell.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ Να εξετάσετε με τον ορισμό αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 4 και στο 2.

2) $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ να δείξετε ότι είναι παραγ. στο 1

3) $f(x) = \begin{cases} x^4 \eta\mu\frac{1}{x^2} & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$ Να εξετάσετε
α) αν η f είναι συνεχής στο 0.
β) αν η f είναι παραγ. στο 0.

4) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2x-3 & \alpha\nu\ x \leq 1 \\ 8x-6 & \alpha\nu\ x > 1 \end{cases}$ Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

5) $f(x) = x^2 + 3|x-1|$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

6) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $4x^2 - \eta\mu^3 x \leq x f(x) \leq 4x^2 + \eta\mu^3 x$. και η f είναι συνεχής στο R να βρεθούν $f(0)$, $f'(0)$

7) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0 = 3$ με $f'(3) = 0$ και $g(x) = \begin{cases} f(x+2) & \alpha\nu\ x \leq 1 \\ f(5x-2) & \alpha\nu\ x > 1. \end{cases}$
Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1.

8) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu 5x$. να βρεθεί το $f'(0)$

9) Αν $f(3+h) = 2 + 3h^4 + \eta\mu 3h$ για κάθε $h \in R$. Να βρεθούν $f(3)$ και $f'(3)$.

10) Αν η f παραγ. στο x_0 με $f'(x_0) = 5$
Να βρεθούν τα όρια
α) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+5h) - f(x_0)}{h}$ β) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0-5h) - f(x_0)}{h}$

γ) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+5h) - f(x_0-5h)}{h}$ δ) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+5h) - f(\ldots)}{3h + \eta\mu\ldots}$

(10) ΜΑΘΗΜΑ 29.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Απόδειξη.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right) = f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

Άρα $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ άρα η f συνεχής στο x_0.

Σχόλιο 1: Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Σχόλιο 2: Αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη ή όχι.

Σχόλιο 3: Αν η f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = \ell$ τότε υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1)
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3 & \text{αν } x<1 \\ \alpha x+\beta & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$$
Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Λύση.

Για ~~να είναι~~ η f παραγωγίσιμη στο 1 πρέπει αρχικά να είναι συνεχής στο 1. Άρα πρέπει

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \alpha+\beta = 2+3 = 5 \Leftrightarrow \beta = 5-\alpha$

τότε η συνάρ. γίνεται $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3, & \text{αν } x<1 \\ \alpha x+5-\alpha, & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$

Είναι $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+3-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 4$

• Είναι $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha x+5-\alpha-5}{x-1} = \alpha$.

Άρα πρέπει $\alpha = 4$ και $\beta = 1$.

Προσοχή 1. Αν γνωρίζω το $f'(x_0)=\ell$ και ζητάω να υπολογίσω κάποιο όριο όταν $x \to x_0$.
Τότε γράφω τα όρια που γνωρίζω δηλαδή
$f'(x_0)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ και αφού η f παραγ. στο x_0 θα είναι και συνεχής στο x_0 άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια προσπαθώ στο όριο που ζητάω να δημιουργήσω το $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή θέτω $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ σαν βοηθητική συνάρτηση και αντικαθιστώ στο όριο που ζητάω.

Άσκηση 2/ Αν η f παραγ. στο 1 με $f'(1)=4$ και $f(1)=2$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^2(x)-3f(x)+2}{x^2-1}$.

Λύση.

Αφού $f'(1)=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=4$

και αφού η f παραγ. στο 1 είναι και συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$

άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-3f(x)+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-2)(f(x)-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x+1}=4\cdot\frac{2-1}{1+1}=2$$

Άσκηση 3/ Αν $f(1)=1$ και $f'(1)=2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{xf(x)-1}{x-1}$

Λύση.

Αφού $f'(1)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$
και αφού η f παραγ. στο 1 είναι και συνεχής στο 1.
άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$

(12)

Θέτω $g(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$, $x \neq 1$ τότε $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$ και

$f(x) = g(x)(x-1)+1$.

άρα

$$\lim_{x\to 1} \frac{xf(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x[g(x)(x-1)+1]-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{xg(x)(x-1)+x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)[xg(x)+1]}{x-1} = \lim_{x\to 1} [xg(x)+1] = 1\cdot 2+1 = 3.$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ}}$ $\boxed{2}$ Αν γνωρίζω κάποιο όριο με $x \to x_0$ και ζητάω το $f'(x_0)$.

Τότε παίρνω βοηθητική συνάρτηση. Θέτω σαν $g(x)$ την παράσταση της οποίας γνωρίζω το όριο. Λύνω ως προς $f(x)$. Και με τη βοήθεια αυτού υπολογίζω το $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Άσκηση 4) Αν η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 4$. και $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-x}{\sqrt{x}-2} = 2$ να δείξετε ότι $f'(4) = \frac{3}{2}$.

Λύση

Έστω $g(x) = \frac{f(x)-x}{\sqrt{x}-2}$, $x \neq 4$ τότε $\lim_{x\to 4} g(x) = 2$ και

$f(x) = g(x)(\sqrt{x}-2)+x$

άρα $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} [g(x)(\sqrt{x}-2)+x] = 4$

και αφού η f παραγ. στο 4 άρα και συνεχής τότε $f(4) = \lim_{x\to 4} f(x) = 4$

τότε $$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-4}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{g(x)(\sqrt{x}-2)+x-4}{x-4} = \lim_{x\to 4} \left[\frac{g(x)\sqrt{x-2}}{x-4} + \frac{x-4}{x-4}\right]$$

$$= \lim_{x\to 4}\left[\frac{g(x)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}+1\right] = \lim_{x\to 4}\left[\frac{g(x)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}+1\right] =$$

$$= \lim_{x\to 4}\left[\frac{g(x)}{\sqrt{x}+2}+1\right] = \frac{2}{4}+1 = \frac{6}{4}.$$

Άσκηση 5/ Αν η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-ημ3x}{x} = 4$. Να υπολογίσετε α) $f(0)$, β) $f'(0)$.

Λύση.

Θέτω $g(x) = \frac{f(x)-ημ3x}{x}$, $x\neq 0$. τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 4$

και $f(x) = x\cdot g(x) + ημ3x$.

οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[x\cdot g(x) + ημ3x] = 0\cdot 4 + 0 = 0$.

και αφού η f παραγωγ. στο 0 θα είναι και συνεχής στο 0.

οπότε $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Άρα $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x\cdot g(x)+ημ3x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[g(x) + 3\frac{ημ3x}{3x}\right] = 4+3\cdot 1 = 7$$

άρα $f'(0) = 7$.

Άσκηση 6/ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και έχει π.ορ. το $\mathbb{R}$.

και $g(x) = \begin{cases} f^3(x) + 3f^2(x) & αν\ x\leq 1 \\ f^2(x) + 3 & αν\ x\geq 1 \end{cases}$

και η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 να υπολογίσετε το $f(1)$, $f'(1)$

(14)

• Αφού η g παραγωγίσιμη στο 1 θα είναι και συνεχής στο 1 άρα:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1) \Leftrightarrow$$

$$f^2(1)+3 = f^3(1)+3f^2(1) \Leftrightarrow f^3(1)+2f^2(1)-3=0.$$

$$(f(1)-1)(f^2(1)+3f(1)+3)=0 \Leftrightarrow f(1)-1=0 \text{ ή } f^2(1)+3f(1)+3=0$$

αδύνατο αφού $\Delta<0$.

άρα $f(1)=1$

Άρα $g(1)=4$

• Αφού η g παραγωγίσιμη στο 1 θα είναι.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)+3-4}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f^3(x)+3f^2(x)-4}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-1)(f^2(x)+4f(x)+4)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot(f(x)+1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot(f^2(x)+4f(x)+4)\right] \quad (1)$$

όμως $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)$ και αφού η f παραγωγίσιμη στο 1 είναι και συνεχής στο 1 άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$.

άρα (1) $\Leftrightarrow f'(1)\cdot(f(1)+1) = f'(1)(f^2(1)+4f(1)+4)$

$$f'(1)\cdot 2 = f'(1)\cdot 9 \Leftrightarrow f'(1)=0.$$

Άσκηση 7/ Αν $|f(x)+3| \le |x-1|^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε α) $f(1)$, β) $f'(1)$

Λύση

για $x=1$ έχω $|f(1)+3|\le 0$ που ισχύει μόνο η ισότητα όταν $f(1)=-3$.

τότε $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)+3}{x-1}$ αν είναι πραγματικός αριθμός.

Από τη δεδομένη έχω.

$$\frac{|f(x)+3|}{|x-1|} \leq |x-1| \Leftrightarrow -|x-1| \leq \frac{f(x)+3}{x-1} \leq |x-1|.$$

αφού $\lim_{x \to 1} |x-1| = 0$ και $\lim_{x \to 1} (-|x-1|) = 0$ τότε και

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+3}{x-1} = 0. \text{ άρα } f'(1) = 0.$$

Άσκηση 8/. Αν η $f: (0, +\infty) \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$ να δείξετε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} f(x) - \sqrt{x_0} f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x_0 f'(x_0) + f(x_0)}{2\sqrt{x_0}}.$$

Λύση.

Αφού η f παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0 άρα $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

τότε.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} f(x) - \sqrt{x_0} f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} f(x) - \sqrt{x} f(x_0) + \sqrt{x} f(x_0) - \sqrt{x_0} f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{\sqrt{x}(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} + \frac{f(x_0)(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{x - x_0} \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\sqrt{x} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right]$$

$$= \sqrt{x_0} \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{2x_0 f'(x_0) + f(x_0)}{2\sqrt{x_0}}.$$

Άσκη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ.

1). $f(x) = \begin{cases} γημ2x & αν\ x<0 \\ x^3+αx^2+β & αν\ x\geq 0 \end{cases}$

Να βρεθούν τα $α, β, γ \in R$ ώστε η f να είναι Παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{α(\sqrt{x}-1)}{x-1} & αν\ x>1 \\ βx^2+x^2-β & αν\ x\leq 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των $α, β \in R$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

3) Αν η f παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1) = 5$ και $f(1)=2$
Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x)-5f(x)+6}{x^2-1}$.

4) Αν η f Παραγωγίσιμη στο 1 και $f(1) = 2$
και $f'(1) = 4$ Να υπολογίσετε το
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x f(x) - 2}{x-1}$.

5). Αν η f Παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$
και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-\sqrt{x+9}}{x} = 2$ να βρεθεί $f(0)$ και $f'(0)$.

6) $g(x) = \begin{cases} f^3(x)+4f^2(x) & αν\ x<1 \\ f(x)+4 & αν\ x\geq 1 \end{cases}$

Αν η f παραγωγίσιμη στο 1 και η g παραγωγίσιμη στο 1
Να βρεθεί το $f(1)$ και το $f'(1)$.

7) Αν η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = α$.
Να δείξετε $\lim\limits_{x\to α} \dfrac{αf(x)-xf(α)}{x-α} = -f(α)+αf'(α)$

(17) **ΜΑΘΗΜΑ 30**

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

Έστω μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A. Έστω B το σύνολο των $x \in A$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αν σε κάθε $x \in B$ αντιστοιχίσουμε το $f'(x)$, τότε ορίζεται μια συνάρτηση $f': B \to R$, που λέγεται παράγωγος συνάρτηση της f.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων.

① $f(x) = c$, $x \in R$ τότε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.
② $f(x) = x$, $x \in R$ τότε $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in R$.
③ $f(x) = x^{\nu}$, $x \in R$, $\nu \in N^*$ τότε $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$ για κάθε $x \in R$.
④ $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,+\infty)$ τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

⑤ $f(x) = \eta\mu x$, $x \in R$ τότε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in R$
⑥ $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in R$ τότε $f'(x) = -\eta\mu x$ για κάθε $x \in R$.
⑦ $f(x) = e^x$, $x \in R$ τότε $f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in R$.
⑧ $f(x) = \ln x$, $x \in (0,+\infty)$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Οι αποδείξεις των ① έως ⑥ γίνονται με τον ορισμό και αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο.

Κανόνες παραγώγισης.

1) Αν f, g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) Αν f, g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η $(f \cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

3) Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και $c \cdot f$ παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

4) Αν f, g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και $\frac{f}{g}$ παραγωγ. στο x_0 αν $g(x_0) \neq 0$.

με $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Γενικά αν f, g παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

3) $(cf)'(x) = c f'(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) \quad f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

5) $(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Αν η g παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Γενικά αν η g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f παραγωγίσιμη στο διάστημα $g(\Delta)$ τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

(19)

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

1) $f(x) = x^{-\nu}$, $x \in R^*$ τότε $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$ για κάθε $x \in R^*$.

2) $f(x) = x^{\alpha}$, $x \in (0,+\infty)$ τότε $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$
όπου $\alpha \in R$ όχι ακέραιος και $\alpha < 1$

3) $f(x) = x^{\alpha}$, $x \in [0,+\infty)$. τότε $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$
όπου $\alpha \in R$ όχι ακέραιος και $\alpha > 1$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ τότε $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

5) $f(x) = \alpha^{x}$, $x \in R$, $\alpha > 0$ τότε $f'(x) = \alpha^{x} \ln\alpha$.

6) $f(x) = \ln|x|$, $x \in R^*$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in R^*$

7) $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ τότε $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

8) $f(x) = \sigma\varphi x$, $x \neq k\pi$ τότε $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ για κάθε $x \neq k\pi$.

9) $f(x) = \log_{\alpha} x$, $x \in (0,+\infty)$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x \ln\alpha}$, $x \in (0,+\infty)$

10) $f(x) = \log x$, $x \in (0,+\infty)$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$, $x \in (0,+\infty)$

Οι αποδείξεις των ανωτέρω γίνονται με τη βοήθεια των κανόνων και αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

1) $f(x) = [g(x)]^{\alpha}$ τότε $f'(x) = \alpha (g(x))^{\alpha-1} \cdot g'(x)$.

2) $f(x) = \sqrt{g(x)}$ τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$.

3) $f(x) = ημ\, g(x)$ τότε $f'(x) = συν\, g(x) \cdot g'(x)$.

4) $f(x) = συν\, g(x)$ τότε $f'(x) = -ημ\, g(x) \cdot g'(x)$.

5) $f(x) = εφ\, g(x)$ τότε $f'(x) = \frac{1}{συν^2 g(x)} \cdot g'(x)$.

6) $f(x) = σφ\, g(x)$ τότε $f'(x) = -\frac{1}{ημ^2 g(x)} \cdot g'(x)$.

7) $f(x) = e^{g(x)}$ τότε $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$.

8) $f(x) = \ln g(x)$ τότε $f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$.

9) $f(x) = \alpha^{g(x)}$ τότε $f'(x) = \alpha^{g(x)} \cdot \ln\alpha \cdot g'(x)$

10) $f(x) = \log g(x)$ τότε $f'(x) = \frac{1}{g(x) \cdot \ln 10} \cdot g'(x)$.

11) $f(x) = \ln|g(x)|$ τότε $f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$.

12) $f(x) = g(x)^{h(x)} = \left(e^{\ln g(x)}\right)^{h(x)} = e^{h(x) \cdot \ln g(x)}$.

τότε $f'(x) = e^{h(x) \cdot \ln g(x)} \cdot \left(h(x) \cdot \ln g(x)\right)'$

13) ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$f''(x) = (f'(x))'$ είναι η Παράγωγος της Παραγώγου.

ΤΡΙΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. Είναι η Παράγωγος της $2^{ης}$ Παραγώγου.

$f^{(3)}(x) = (f''(x))'$. κτλ.

21

ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ.

1) $f(x)=\sqrt{x}$. να δείξετε $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Απόδειξη.

Π. ορ της f είναι $A=[0,+\infty)$.

για κάθε $x_0>0$ έχω:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0^+}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}.$$

$$=\lim_{x\to x_0^+}\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

για $x_0=0$. έχω:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άρα η f παραγωγ. για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Να δείξετε $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη.

$$f'(x)=(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

3) $f(x)=\alpha^x$ Να δείξετε $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$.

$\alpha>0,\ \alpha\neq 1$

Απόδειξη.

$f(x)=\alpha^x=(e^{\ln\alpha})^x=e^{x\ln\alpha}$. τότε

$$f'(x)=(e^{x\ln\alpha})'=e^{x\ln\alpha}(x\cdot\ln\alpha)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha\cdot(x)'=$$
$$=\alpha^x\cdot\ln\alpha.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ⓐ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ. $\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}}$

1) $f(x) = x^4$ π. ορ. $A_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = x^{-4}$ π. ορ $A_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -4x^{-5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

3) $f(x) = x^{5/4}$ π. ορ $A_f = [0, +\infty)$.
$f'(x) = \frac{5}{4} x^{5/4 - 1} = \frac{5}{4} x^{1/4}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

4) $f(x) = x^{4/5}$ π. ορ $\underline{A_f = [0, +\infty)}$.
$f'(x) = \frac{4}{5} x^{4/5 - 1} = \frac{4}{5} x^{-1/5}$ για κάθε $\underline{x \in (0, +\infty)}$.
Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
αφού ο εκθέτης είναι κλάσμα < 1.
και $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^{4/5}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{1/5}} = +\infty$.

5) $f(x) = x^{-4/5}$ π. ορ $A_f = (0, +\infty)$.
$f'(x) = -\frac{4}{5} x^{-\frac{4}{5} - 1} = -\frac{4}{5} x^{-9/5}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Ⓑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΡΙΖΑΣ.

6) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$, π. ορ $A = [0, +\infty)$, $f(x) = x^{3/4}$.
άρα $f'(x) = \frac{3}{4} x^{3/4 - 1} = \frac{3}{4} x^{-1/4}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

7) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$, π. ορ $A = [0, +\infty)$, $f(x) = x^{5/4}$.
άρα $f'(x) = \frac{5}{4} x^{5/4 - 1} = \frac{5}{4} x^{1/4}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, π. ορ. $A = \mathbb{R}$
είναι $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{|x|^4} = |x|^{4/3} = \begin{cases} x^{4/3} & \text{αν } x \geq 0 \\ (-x)^{4/3} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$.

Για $x > 0$ $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{1/3}$
Για $x < 0$ $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot (-x)^{1/3} \cdot (-x)' = -\frac{4}{3} (-x)^{1/3}$
Εξετάζω για $x = 0$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^{4/3}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/3} = 0$.

(23)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{-(-x)}=\lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{1/3}\right)=0$$

Άρα η f παραγωγίσιμη και στο 0 με $f'(0)=0$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^{1/3} & \text{αν } x\geq 0\\ -\frac{4}{3}(-x)^{1/3} & \text{αν } x<0\end{cases}$.

9) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ π.ορ. $A=\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{|x|^2}=|x|^{2/3}=\begin{cases}x^{2/3} & \text{αν } x\geq 0\\ (-x)^{2/3} & \text{αν } x<0\end{cases}$.

- για $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}$.
- για $x<0$ είναι $f'(x)=\frac{2}{3}(-x)^{-1/3}\cdot(-x)'=-\frac{2}{3}(-x)^{-1/3}$
- Εξετάζω για $x=0$.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{1/3}}=+\infty$ άρα η f δεν είναι παραγ. στο 0.

άρα $f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^{-1/3} & \text{αν } x>0\\ -\frac{2}{3}(-x)^{-1/3} & \text{αν } x<0.\end{cases}$

10) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{3/2}}=x^{-3/2}$ π.ορ $A=(0,+\infty)$.

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-5/2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Γ Παράγωγος αθροίσματος

11) $f(x)=x^3+\sqrt{x}+2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\theta$. π.ορ $A=[0,+\infty)$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\sigma\upsilon\nu x$

12) $f(x)=x^5+\ln x+\ln 5$ π.ορ $A=(0,+\infty)$

$f'(x)=5x^4+\frac{1}{x}+0=5x^4+\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in A$

Δ $\quad (c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

13) $f(x) = 5\cdot ημx + 3x^4 + 2 ln x$ Π. ορ $A=(0,+\infty)$

$f'(x) = 5\cdot συνx + 3\cdot 4x^3 + 2\cdot \frac{1}{x} = 5συνx + 12x^3 + \frac{2}{x}$

για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

14) $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}$. Π. ορ $A=(0,+\infty)$

$f'(x) = (2\sqrt{x} + 4x^{-1} + 2x^{-3})' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4\cdot(-x^{-2}) + 2(-3x^{-4}) =$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Ε Παράγωγος γινομένου.

15) $f(x) = x^3\cdot ημx$ Π. ορ. $A=R$. Η f παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτ.

με $f'(x) = (x^3)'ημx + x^3(ημx)' = 3x^2 ημx + x^3 συνx$.

16) $f(x) = 4x^2\cdot lnx$ Π. ορ $A=(0,+\infty)$ η f παραγωγ. στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγ. συναρτήσεων

με $f'(x) = (4x^2)'lnx + 4x^2(lnx)' = 8x\, lnx + 4x^2\frac{1}{x} =$

$= 8x\, lnx + 4x = 4x(lnx + 2)$

17) $f(x) = \sqrt{x}\cdot ημx$. Π. ορ. $A=[0,+\infty)$

για κάθε $x>0$ η f παραγ. ως γινομ. παραγ. συναρ.

με $f'(x) = (\sqrt{x})'ημx + \sqrt{x}\cdot(ημx)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}ημx + \sqrt{x}\cdot συνx$

για $x=0$ είναι $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,ημx}{x} =$

$= \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x} = 0\cdot 1 = 0$ άρα $f'(0)=0$.

άρα $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}ημx + \sqrt{x}\,συνx & αν\ x>0 \\ 0 & αν\ x=0. \end{cases}$

(25)

Ζ Παράγωγος Πηλίκου

(18) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ Π.ορ $A = R^*$ η f είναι παραγωγ. στο R^* ως πράξ παραγ. συναρτ.

με $f'(x) = \dfrac{(e^x)'x^2 - e^x(x^2)'}{x^4} = \dfrac{e^x x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{e^x x(x-2)}{x^4} =$

$= \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(19) $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{e^x}$, Π.ορ $A = (0, +\infty)$

Η f είναι παραγ. στο $(0,+\infty)$ ως πράξ. παρ. συναρτ.

με $f'(x) = \dfrac{(x^2\ln x)'e^x - (x^2\ln x)\cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{[(x^2)'\ln x + x^2(\ln x)']e^x - x^2\ln x \cdot e^x}{e^{2x}}$

$= \dfrac{(2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x})e^x - x^2\ln x e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(2x\ln x + x - x^2\ln x)}{e^{2x}}$

$= \dfrac{x(2\ln x + 1 - x\ln x)}{e^x}$

Η Παράγωγος σε αριθμό

(20) Αν $f'(2) = 4$, $f(2) = 6$; $g(2) = 1$, $g'(2) = 5$

Να υπολογίσετε:

α) $(f+g)'(2)$ β) $(f\cdot g)'(2)$ γ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

Λύση

α) $(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 4 + 1 = 5$.

β) $(f\cdot g)'(2) = f'(2)\cdot g(2) + f(2)\cdot g'(2) = 4\cdot 5 + 6\cdot 1 = 26$.

γ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \dfrac{f'(2)\cdot g(2) - f(2)\cdot g'(2)}{g^2(2)} = \dfrac{4\cdot 5 - 6\cdot 1}{5^2} = \dfrac{14}{25}$

(21) Αν $f'(5) = 4$ και $g(2) = 5$ και $g'(2) = 3$

Να υπολογ. $(f\circ g)'(2)$

$(f\circ g)'(2) = f'(g(2))\cdot g'(2) = f'(5)\cdot g'(2) = 4\cdot 3 = 12$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων.

i) $f(x) = 4x^3 + \frac{2}{x^2} + 5\theta^2$

ii) $f(x) = x^{2/3} + 6x^{3/2} + \sqrt{x} + \eta\mu\theta$

2) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$, ii) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$, iii) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

(iv) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$

3) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^3 \cdot \ln\sqrt{x}$, ii) $f(x) = 4x^2 \eta\mu x$, iii) $f(x) = 2x^3 \cdot e^x$

4) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \eta\mu x$, ii) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x$.

5) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, ii) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, iii) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

6) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων.

i) $f(x) = \frac{x^3 \ln x}{e^x}$, ii) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{e^x}$, iii) $f(x) = \frac{x e^x}{\sqrt{x}}$

7) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^2 \eta\mu x + x\,\sigma\upsilon\nu x$.

ii) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$

8) Αν $f'(1)=4$, $f(1)=2$, $g'(1)=3$, $g(1)=5$

Να βρεθούν α) $(f+g)'(1)$ β) $(f\cdot g)'(1)$ γ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$

9) Αν $f'(3)=4$ και $g(1)=3$ και $g'(1)=5$

Να βρεθεί $(f\circ g)'(1)$

ΜΑΘΗΜΑ 31

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $f(x) = \text{ημ}(x^2+4)$, π.ορ $A = \mathbb{R}$.
$f'(x) = \text{συν}(x^2+4)\cdot(x^2+4)' = 2x\,\text{συν}(x^2+4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \text{συν}(5x+3)$, π.ορ $A = \mathbb{R}$
$f'(x) = -\text{ημ}(5x+3)\cdot(5x+3)' = -5\,\text{ημ}(5x+3)$

3. $f(x) = \ln(x^4+2)$, π.ορ $A = \mathbb{R}$.
$f'(x) = \dfrac{1}{x^4+2}\cdot(x^4+2)' = \dfrac{4x^3}{x^4+2}$

5. $f(x) = e^{x^3+2x}$, π.ορ $A = \mathbb{R}$
$f'(x) = e^{x^3+2x}\cdot(x^3+2x)' = (3x^2+2)\,e^{x^3+2x}$

6. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$, π.ορ $A = \mathbb{R}$
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot(x^2+3)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

7. $f(x) = \ln\sqrt{x}$, π.ορ $A = (0,+\infty)$
$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$, $x \in (0,+\infty)$

8. $f(x) = \text{ημ}(\sqrt{x^2+1})$. π.ορ $A = \mathbb{R}$.
$f'(x) = \text{συν}\sqrt{x^2+1}\cdot(\sqrt{x^2+1})' = \text{συν}\sqrt{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'$
$= \text{συν}\sqrt{x^2+1}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x\,\text{συν}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$

9) $f(x) = e^{\text{ημ}5x}$. π.ορ $A = \mathbb{R}$
$f'(x) = e^{\text{ημ}5x}\cdot(\text{ημ}5x)' = e^{\text{ημ}5x}\cdot\text{συν}5x\cdot(5x)' = 5e^{\text{ημ}5x}\cdot\text{συν}5x$

(10) $f(x) = (5x^2+2)^3$ π.ορ $A = R$.

$f'(x) = 3(5x^2+2)^3 \cdot (5x^2+2)' = 3\cdot(5x^2+2)^3 \cdot 10x =$
$= 30x(5x^2+2)^3$

(11) $f(x) = (x^2+1)^{3/2}$ π.ορ $A = R$.

$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2+1)^{3/2-1} \cdot (x^2+1)' = \frac{3}{2}\cdot(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = 3x(x^2+1)^{-1/2}$

για κάθε $x \in R$.

(12) $f(x) = \sqrt[3]{x^4+2}$, π.ορ $A = R$; $f(x) = (x^4+2)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^4+2)^{1/3-1} \cdot (x^4+2)' = \frac{4x^3}{3}\cdot(x^4+2)^{-1/2}$, $x \in R$

(13) $f(x) = ημ^3 x$. π.ορ $A = R$.

$f'(x) = 3ημ^2 x \cdot (ημx)' = 3ημ^2 x \cdot συνx$, $x \in R$

(14) $f(x) = ln^4 x$. π.ορ $A = (0, +\infty)$.

$f'(x) = 4ln^3 x \cdot (ln x)' = 4 ln^3 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{4ln^3 x}{x}$, $x > 0$.

(15) $f(x) = ln^3(x^2+1) = (ln(x^2+1))^3$, π.ορ $A = R$

$f'(x) = 3(ln(x^2+1))^2 \cdot (ln(x^2+1))' = 3ln^2(x^2+1) \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)'$
$= \frac{6x \cdot ln^2(x^2+1)}{x^2+1}$

(16) $f(x) = ημ^4(3x+2) = (ημ(3x+2))^4$, π.ορ $A = R$.

$f'(x) = 4(ημ(3x+2))^3 \cdot (ημ(3x+2))'$
$= 4ημ^3(3x+2) \cdot συν(3x+2) \cdot (3x+2)'$
$= 12ημ^3(3x+2) \cdot συν(3x+2)$

(17) $f(x) = συν^3(x^4)$ π.ορ $A = R$

$f'(x) = 3συν^2 x^4 \cdot (συν x^4)' = 3συν^2 x^4 \cdot (-ημ x^4) \cdot (x^4)'$
$= -12x^3 συν^2 x^4 \cdot ημ x^4$ για κάθε $x \in R$.

(18) $f(x) = 2^{x^2+5}$ Π.ορ. $A=\mathbb{R}$

$f'(x) = 2^{x^2+5} \cdot \ln 2 \cdot (x^2+5)' = 2x \cdot 2^{x^2+5} \cdot \ln 2$, $x \in \mathbb{R}$

(19) $f(x) = \sqrt{x}^{\,x}$ Π.ορ $A=(0,+\infty)$

Είναι $f(x) = (e^{\ln\sqrt{x}})^x = e^{x\ln\sqrt{x}}$.

άρα $f'(x) = e^{x\ln\sqrt{x}} \cdot (x \cdot \ln\sqrt{x})' = e^{x\ln\sqrt{x}}(x'\ln\sqrt{x} + x(\ln\sqrt{x})')$

$= e^{x\ln\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})') = e^{x\ln\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}})$

$= e^{x\ln\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x} + \frac{1}{2})$.

(20) $f(x) = (\eta\mu x)^x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Είναι $f(x) = (e^{\ln\eta\mu x})^x = e^{x\ln\eta\mu x}$.

άρα $f'(x) = e^{x\ln\eta\mu x} \cdot (x\ln\eta\mu x)' = e^{x\ln\eta\mu x}(x'\ln\eta\mu x + x(\ln\eta\mu x)')$

$= e^{\ln\eta\mu x} \cdot (\ln\eta\mu x + x \cdot \frac{1}{\eta\mu x} \cdot (\eta\mu x)')$

$= e^{x\ln\eta\mu x} \cdot (\ln\eta\mu x + x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}) = e^{x\ln\eta\mu x} \cdot (\ln\eta\mu x + x \cdot \sigma\phi x)$.

(21) Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. να βρεθεί η παράγωγος των. i) $g(x) = f(x^2+5)$.

ii) $g(x) = f(\frac{1}{x}) + f(-x^2)$

i) Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσ. συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x^2+5) \cdot (x^2+5)' \Leftrightarrow$

$g'(x) = 2x f'(x^2+5)$.

ii) Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξει παραγωγ. συναρτήσεων με

$g'(x) = f'(\frac{1}{x}) \cdot (\frac{1}{x})' + f'(-x^2) \cdot (-x^2)'$.

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot f'(x) - 2x f'(-x)$

22) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2 & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x^3+3 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Να βρεθεί η παράγωγος της f.

Λύση

Π. ορισμού $A = \mathbb{R}$.

- Για $x < 1$ είναι $f'(x) = 6x$
- Για $x > 1$ είναι $f'(x) = 6x^2$
- Εξετάζω για $x_0 = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x^2+2-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x^2-3}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} 3(x+1) = 6.$

και $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x^3+3-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2(x^3-1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} 2(x^2+x+1) = 6.$

άρα η f παραγωγίσιμη και στο 1 με $f'(1) = 6$.

άρα $f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{αν } x < 1 \\ 6 & \text{αν } x = 1 \\ 6x^2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ ή $f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{αν } x \leq 1 \\ 6x^2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

23) $f(x) = 3x^2 + |x-1|$. Να βρεθεί η παράγωγος της f.

Λύση

$f(x) = \begin{cases} 3x^2+x-1 & \text{αν } x \geq 1 \\ 3x^2-x+1 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

- Για $x > 1$, $f'(x) = 6x+1$.
- Για $x < 1$, $f'(x) = 6x-1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x^2-x+1-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x^2-x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(3x+2)}{\cancel{x-1}} = 5$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3x^2+x-1-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3x^2+x-4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(3x+4)}{\cancel{x-1}} = 7$

άρα η f δεν είναι παραγωγ. στο 1.

άρα $f'(x) = \begin{cases} 6x+1 & \text{αν } x > 1 \\ 6x-1 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

(24) Αν η f παραγωγίσιμη στο R και $f(3)=2$, $f'(3)=4$
και $g(x) = f^3(x^2+2)$.
α) Να δείξετε ότι η g παραγ. στο R και να βρεθεί $g'(x)$
β) Να βρεθεί το $g'(1)$

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο R

με $g'(x) = \left(f^3(x^2+2)\right)' = 3f^2(x^2+2)\cdot\left(f(x^2+2)\right)'$

$= 3f^2(x^2+2)\cdot f'(x^2+2)\cdot(x^2+2)'$

$= 6x\cdot f^2(x^2+2)\cdot f'(x^2+2)$

για $x=1$.

β) $g'(1) = 6\cdot 1\cdot f^2(3)\cdot f'(3) = 6\cdot 2^2\cdot 4 = 96$.

(25) Αν η f παραγωγίσιμη στο R και η f^{-1} είναι ώαρος στο R και $f'(x)\neq 0$ στο R τότε να δείξετε $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Για κάθε $x\in$ π.ορισμού της f^{-1} έχω:

$f(f^{-1}(x)) = x$ τότε $\left(f(f^{-1}(x))\right)' = (x)' \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x) = 1$

$\Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

(πχ) Αν $f(x) = e^x + x + 1$ να υπολογίσετε το $(f^{-1})'(2)$

Π.ορ της f είναι $A=R$ η f συνεχής στο R και παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x+1$ η f είναι 1-1 αφού είναι $\nearrow$ στο R. Άρα έχει αντίστροφη την f^{-1}

είναι $f(0)=2$ άρα $f^{-1}(2)=0$.

Άρα $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

ΝΑ βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων.

1) $f(x) = εφ(5x^3+2)$, $g(x) = συν(4x^2+2)$

2) $f(x) = \ln^5(x^2+1)$, $g(x) = εφ^3(x^2+5)$.

3) $f(x) = e^{5εφ^2x}$

4) $f(x) = 5^{συν4x}$.

5) $f(x) = (x-2)^{\sqrt{x}}$, $x>0$

6) $f(x) = (συνx)^x$, $x \in (0, \pi/2)$

7) $f(x) = εφ^3 5x + συν^3 2x$.

8) $f(x) = (x^2+4)^{5/4}$.

9) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2+3)^3}$.

10) $f(x) = \sqrt{συν^4x + x^2}$

11) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+2}}$.

12) $f(x) = e^{5x} \cdot εφ3x$.

13) $f(x) = \dfrac{συν5x}{e^{2x}}$.

14) $f(x) = \sqrt{5x} \cdot εφ3x$

15) $f(x) = \begin{cases} 4x^2+2x+1 & αν\ x \leq 1 \\ 2x^4+2x+3 & αν\ x>1 \end{cases}$

16) $f(x) = 4x^2 + |x-2|$

17) Αν η f παραγ. στο R να βρεθεί η παράγωγος των

i) $g(x) = 5f^3(x) + 3f^2(x) + f(x)$ ii) $h(x) = f(4x^2+5) + f(-x)$

iii) $\phi(x) = f^2\left(\frac{1}{x}\right) + f^3(2x^3+4)$

ΜΑΘΗΜΑ 32.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Αν $f(1) = g(1) = 4$ και $f'(1) = 2$ και $g'(1) = 6$.
και $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ Να υπολογ. το $h'(1)$

Λύση.

$h'(1) = f'(1)\, g(1) + f(1)\, g'(1) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 32$

(προσοχή!) ; (f, g παραγωγίσιμες μόνο στο x_0).

2) Αν $f(4) = 2$ και $g(1) = 4$ και $g'(1) = 6$.
Να βρεθεί το $h'(1)$ όταν.
$h(x) = f(g(x))$

Λύση.

$h'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(4) \cdot g'(1) = 2 \cdot 6 = 12$.

3) Αν $f(x) = (4x^3+2) \cdot g(x)$ και $g(2) = 4$, $g'(2) = 2$
Να βρεθεί το $f'(2)$

Λύση

Έστω $h(x) = 4x^3+2$ τότε η h παραγ. στο R με.
$h'(x) = 12x$. οπότε. $h'(2) = 24$ και $h(2) = 34$.
Άρα έχω $f(x) = h(x) \cdot g(x)$.
Οπότε η f παραγ. στο 2 ως γινομ. παραγ. συναρτ.
στο 2. με.
$f'(2) = h'(2) \cdot g(2) + h(2) \cdot g'(2) = 24 \cdot 4 + 34 \cdot 2 = 164$.

4) Αν $f(x) = g(4x^2 - 2x)$
και $g'(2) = 3$ Να βρεθεί $f'(1)$.

Λύση

Έστω $h(x) = 4x^2 - 2x$ τότε η h παραγωγίσιμη
στο R με $h'(x) = 8x - 2$
οπότε $h'(1) = 6$ και $h(1) = 2$
και $f(x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$

Άρα

$f'(1) = (g \circ h)'(1) = g'(h(1)) \cdot h'(1) = g'(2) \cdot h'(1) = 3 \cdot 6 = 18$.

Για $x = 1$ η (1) γίνεται $f^2(1) + 4f(1) = -4 \Leftrightarrow$
$f^2(1) + 4f(1) + 4 = 0 \Leftrightarrow (f(1)+2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -2$

Για $x = 1$ η (2) γίνεται $-2f(1) \cdot f'(1) + 16f'(1) = 4 \Leftrightarrow$
$-2 \cdot (-2) \cdot f'(1) + 16f'(1) = 4 \Leftrightarrow 20f'(1) = 4 \Leftrightarrow f'(1) = 1/5$.

(7) Αν $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in R$ να βρεθεί το λ ώστε
$f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = 0$.

Λύση

Είναι $f'(x) = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}$, για κάθε $x \in R$
$f''(x) = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda (e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $x \in R$

άρα $f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + 5\lambda e^{\lambda x} + 6e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow$
$e^{\lambda x}(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} = 0$ αδύνατη ή $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$
$\Leftrightarrow \lambda = -2$ ή $\lambda = -3$

(8) Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ β' βαθμού τέτοιο ώστε.
$p(0) = 4$, $p'(0) = 2$, $p''(1) = 12$.

Λύση

Έστω $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ τότε.
$p'(x) = 2\alpha x + \beta$.
$p''(x) = 2\alpha$.

άρα $\left.\begin{aligned} p(0) &= 4 \\ p'(0) &= 2 \\ p''(1) &= 12 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \gamma &= 4 \\ \beta &= 2 \\ 2\alpha &= 12 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \gamma &= 4 \\ \beta &= 2 \\ \alpha &= 6 \end{aligned}\right\}$ άρα $p(x) = 6x^2 + 2x + 4$

(9) Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε.
Να έχει βαθμό $\nu \geq 2$ και $(p'(x))^2 = 4p(x) + p''(x) - 1$ (1) $\forall x \in R$.
και $p(0) = 2$

Λύση.

Έστω $\nu \geq 2$ ο βαθμός του πολυωνύμου $p(x)$ τότε
$\nu - 1$ ο βαθμός του $p'(x)$
$\nu - 2$ ο βαθμός του $p''(x)$.

Τοτε ο βαθμός του $\left(P'(x)\right)^2 = (\nu-1)\cdot 2$. (πολλαπλασιάζω τους εκθέτες)
Ενώ ο βαθμός του $4P(x)+P''(x)-1$ είναι ν αφού το $P(x)$ έχει το μεγαλύτερο βαθμό από το $P''(x)$.
οπότε πρέπει βαθμός α' μέλους $=$ βαθμός β' μέλους
άρα $2(\nu-1)=\nu \Leftrightarrow \nu=2$.
άρα $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Αφού $P(0)=2 \Leftrightarrow \gamma=2$ άρα $P(x)=\alpha x^2+\beta x+2$.
$P'(x)=2\alpha x+\beta$, $P''(x)=2\alpha$.

Από την (1) έχω.
$(2\alpha x+\beta)^2=4(\alpha x^2+\beta x+2)+2\alpha-1 \Leftrightarrow$
$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=4\alpha x^2+4\beta x+8+2\alpha-1 \Leftrightarrow$
$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=4\alpha x^2+4\beta x+2\alpha+7 \Leftrightarrow$ (από ισότητα πολυωνύμων) $\Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha^2=4\alpha\\ 4\alpha\beta=4\beta\\ 2\alpha+7=\beta^2\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=1 \text{ ή } \alpha=0 \text{ (απορ.)}\\ \text{επαληθεύει για } \alpha=1, \beta=\pm 3\\ \beta=\pm 3\end{cases}$ $\begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=\pm 3\end{matrix}$

άρα $P(x)=x^2-3x+2$ ή $P(x)=x^2+3x+2$.

(10) Αν η f παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$, $\alpha>0$
Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)\cdot\ln x-f(\alpha)\cdot\ln\alpha}{x^2-\alpha x}$

Λύση

Αφού f παραγωγίσιμη στο α είναι και συνεχής στο α.
άρα ισχύουν $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$

άρα $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)\ln x-f(\alpha)\ln\alpha}{x^2-\alpha x}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)\ln x-f(\alpha)\cdot\ln x+f(\alpha)\ln x-f(\alpha)\ln\alpha}{x(x-\alpha)}$
$=\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{\ln x}{x}\cdot\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+\dfrac{f(\alpha)}{x}\cdot\dfrac{\ln x-\ln\alpha}{x-\alpha}\right]$

είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$

(36)

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(\alpha)}{x}=\frac{f(\alpha)}{\alpha}.$$

Αν θέσω $g(x)=\ln x$ τότε $g'(x)=\frac{1}{x}$ άρα $g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\ln x-\ln\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

άρα το όριο γίνεται $=\frac{\ln\alpha}{\alpha}\cdot f'(\alpha)+\frac{f(\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}$

(11) Αν f άρτια και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f' περιττή και $f'(0)=0$.

Λύση

Αφού η f άρτια ισχύει $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Παραγωγίζω και τα δύο μέλη και έχω $(f(-x))'=(f(x))' \Leftrightarrow$
$f'(-x)\cdot(-x)'=f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)$ άρα f' περιττή
και για $x=0$ είναι $-f'(0)=f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0$.

(12)* Αν $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)+2$, $x,y\in\mathbb{R}$ και η f παραγ. στο $\mathbb{R}$.
α) Να βρεθεί $f(0)$
β) Να δείξετε $f'(x)=f'(0)\cdot e^x+f(x)$

Λύση

α) για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)+f(0)+2 \Leftrightarrow f(0)=-2$

β) Θεωρώ το x ως σταθερό αριθμό και παραγωγίζω και τα 2 μέλη ως προς y άρα

$$(f(x+y))'=(e^x f(y)+e^y f(x)+2)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x+y)(x+y)'=e^x\cdot f'(y)+(e^y)'\cdot f(x)+0 \Leftrightarrow$$
$$f'(x+y)(0+1)=e^x\cdot f'(y)+e^y f(x)$$

$f'(x+y)=e^x\cdot f'(y)+e^y f(x)$. για $y=0$ έχω

$$f'(x)=e^x\cdot f'(0)+f(x)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Αν $f(1) = g(1) = 4$ και $f'(1) = 2$, $g'(1) = 6$ και $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
Να υπολογίσετε το $h'(1)$.

2) Αν $g(1) = 4$, $f'(4) = 2$, $g'(1) = 6$ και $h(x) = (f \circ g)(x)$.
Να υπολογίσετε $h(1)$

3) Αν $f(x) = (2x^2 - 4) \cdot g(x)$ και $g(1) = g'(1) = 2$.
Να υπολογίσετε $f'(1)$

4) Αν $f^3(x) + 2f(x) = 3 - 5x^2$ για κάθε $x \in R$ και η f παραγωγίσιμη στο R. Να υπολογίσετε $f(0)$, $f'(0)$

5) Αν η f παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει
$f(ημx) = e^x συνx$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
Να υπολογίσετε $f(0)$, $f'(0)$.

6) Αν η f παραγωγίσιμη στο R.
και $f^3\left(-\frac{1}{x}\right) + f(2x - 3) = 4x - 6$.
Να υπολογίσετε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$

7) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ β' βαθμού τέτοιο ώστε.
$P(0) = 4$, $P'(1) = 6$, $P''(1) = 2$.

8) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύουν
$P'(4) = 0$ και $(P'(x))^2 = P(x)$ για κάθε $x \in R$.

9) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$.
Να δείξετε

i) $\lim_{x \to \alpha} \frac{x f(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)$

ii) $\lim_{x \to \alpha} \frac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = e^\alpha (f(\alpha) + f'(\alpha))$

10) Αν μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε.
α) η γραφ. παράσταση της f και της f'' διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

11) $f(x) = e^x + 5x + 2$ Αν η f^{-1} είναι παραγωγ. στο R Να υπολογ. το $(f^{-1})'(3)$ ...