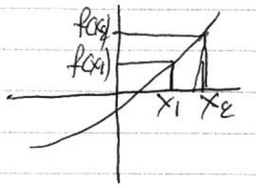
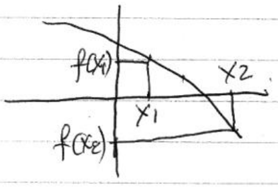
ΜΑΘΗΜΑ 12.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΑΚΡΟΤΑΤΑ



• Μια συνάρτηση (f) λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Α όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$



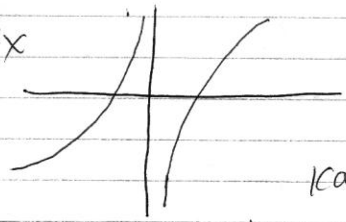
• Μια συνάρτηση (f) λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Α. όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$. με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

• Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε όλο το π. ορισμού της, τότε λέγεται γνησίως μονότονη.

• Αν αλλάζει μονοτονία σε διάφορα διαστήματα τότε λέγεται γνησίως μονότονη κατά διαστήματα.

• Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα A_1 και A_2 χωριστά δεν σημαίνει ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 \cup A_2$.

Πχ



η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και όχι στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

• Η γνησίως αύξουσα συμβολίζεται ↗
• Η γνησίως φθίνουσα συμβολίζεται ↘

• Αν ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in$ π. ορισμού της συναρτ. f τότε το $f(x_0)$ λέγεται ελάχιστο της συνάρτησης f.

• Αν ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in$ π. ορισμού της συνάρ. f τότε το $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο της συναρτ. f.

• ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ
$f(A) < f(B)$

i) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα
τότε $f(A) < f(B) \Leftrightarrow A < B$

ii) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα
τότε $f(A) < f(B) \Leftrightarrow A > B$.

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1) Έστω $f(x) = 2e^{3-x} - 1$ να βρεθεί η μονοτονία της f.

Λύση.

Π. ορ της f είναι $A = \mathbb{R}$.
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow$
$3-x_1 > 3-x_2 \Leftrightarrow e^{3-x_1} > e^{3-x_2} \Leftrightarrow 2e^{3-x_1} > 2e^{3-x_2} \Leftrightarrow$
$2e^{3-x_1} - 1 > 2e^{3-x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2) Έστω $f(x) = x^3 + 2x - 6$ να βρεθεί η μονοτονία της f.

Λύση.

Π. ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R}$.
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ (1)
και $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 6 < 2x_2 - 6$ (2)
(1)+(2) $\Rightarrow x_1^3 + 2x_1 - 6 < x_2^3 + 2x_2 - 6 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
άρα η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$

Άσκηση 3) Έστω $f(x) = \frac{3}{x-2}$. Να βρεθεί η μονοτονία της f.

Λύση

Π. ορισμού της f είναι $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ με
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \Leftrightarrow$
$\frac{3}{x_1 - 2} > \frac{3}{x_2 - 2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f \searrow$ στο $(-\infty, 2)$

Έστω $x_1, x_2 \in (2,+\infty)$ με.

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-2<x_2-2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-2} > \frac{1}{x_2-2} \Leftrightarrow$

$\frac{3}{x_1-2} > \frac{3}{x_2-2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f \searrow$ στο $(0,+\infty)$

Άσκηση 4/ Αν η f είναι $\nearrow$ στο R να βρεθεί η μονοτονία της $g(x) = f^3(x)+3f(x)+5$

Λύση

Π.ορ. της g είναι $A=R$.

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

$\Leftrightarrow f^3(x_1)<f^3(x_2)$ (1)

και $x_1<x_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow 3f(x_1)<3f(x_2) \Leftrightarrow$

$3f(x_1)+5<3f(x_2)+5$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow f^3(x_1)+3f(x_1)+5<f^3(x_2)+3f(x_2)+5$

$\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η $g \nearrow$ στο R.

Άσκηση 5/ Αν η $f \nearrow$ στο R και η $g \searrow$ στο R να βρεθεί η μονοτονία των fog, gof, gog.

Λύση

i) για την fog Π.ορ. $A=R$ και $(fog)(x)=f(g(x))$

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2)$

$\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(g(x_1))>f(g(x_2)) \Leftrightarrow (fog)(x_1)>(fog)(x_2)$

άρα η fog είναι $\searrow$ στο R

ii) για την gof Π.ορ $A=R$ και $(gof)(x)=g(f(x))$

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

$\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(f(x_1))>g(f(x_2)) \Leftrightarrow (gof)(x_1)>(gof)(x_2)$

άρα η $gof \searrow$

iii) Για την gog Π.ορ $A=R$ και $(gog)(x)=g(g(x))$

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2)$

$\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(g(x_1))<g(g(x_2)) \Leftrightarrow (gog)(x_1)<(gog)(x_2)$

άρα η $gog \nearrow$

Άσκηση 6/ Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$, $B(2,3)$ Να λυθούν οι ανισώσεις.

i) $f(\ln^3 x) < f(\ln x)$

ii) $f(x^2+x) > 3$

Λύση.

Είναι $f(1)=5$ και $f(2)=3$ άρα $1<2$ και $f(1)>f(2)$ και αφού η f είναι γνησίως μονότονη θα είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$.

i) $f(\ln^3 x) < f(\ln x) \overset{f\searrow}{\Longleftrightarrow} \ln^3 x > \ln x \Leftrightarrow$
$\ln^3 x - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln^2 x - 1) > 0 \Leftrightarrow$
$\ln x(\ln x - 1)(\ln x + 1) > 0$

$x \in (e^{-1},1) \cup (e,+\infty)$

x	0		e^{-1}		1		e	
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\ln x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

ii) $f(x^2+x) > 3$ όμως $3 = f(2)$ άρα
$f(x^2+x) > f(2) \overset{f\searrow}{\Longleftrightarrow} x^2+x < 2 \Leftrightarrow$
$x^2+x-2 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Leftrightarrow$
$x \in (-2,1)$

x		-2		1	
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

Άσκηση 7/ Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(1) + f^2(2) - 2f(2) - 4f(1) + 5 = 0$

i) Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $(f \circ f)(2x-6) < 2$

Λύση.

i) Είναι $f^2(1) - 4f(1) + 4 + f^2(2) - 2f(2) + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$(f(1)-2)^2 + (f(2)-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1)-2=0$ και $f(2)-1=0$
$\Leftrightarrow f(1)=2$ και $f(2)=1$.
Αφού $1<2$ και $f(1)>f(2)$ η f είναι $\searrow$

ii) Η ανίσωση γράφεται $f(f(2x-6)) < f(1) \overset{f\searrow}{\Longleftrightarrow}$

$f(2x-6) > 1 \Leftrightarrow f(2x-6) > f(2) \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow} 2x-6 < 2$
$\Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$

Άσκηση 8/ Αν $f(x) = 2(x-2)^2 - 4$.
Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

Λύση

Είναι $2(x-2)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in R$ άρα
$2(x-2)^2 - 4 \geq -4 \Leftrightarrow f(x) \geq -4$ για κάθε $x \in R$.
άρα η f έχει ολικό ελάχιστο το -4

Άσκηση 9/ Αν $|f(x) - 2| \leq 6$ για κάθε $x \in R$.
Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της f.

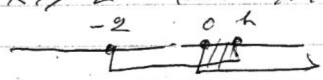
Λύση.

Είναι $|f(x)-2| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq f(x) - 2 \leq 6 \Leftrightarrow$
$-6+2 \leq f(x) \leq 6+2 \Leftrightarrow -4 \leq f(x) \leq 8$.
άρα η f έχει ελάχιστο το -4
μέγιστο το 8.

Άσκηση 10/ Αν μια συνάρτηση f έχει π. ορισμού το $[1, 4]$ και είναι $\searrow$
και $g(x) = f(2-x) + \ln x - 2$.
Να βρεθεί η μονοτονία της g.

Λύση.

Βρίσκω το π. ορισμού της g.
Πρέπει $2 - x \in [1, 4]$ και $x > 0$
$1 \leq 2 - x \leq 4$ και $x > 0$
$-1 \leq -x \leq 2$ και $x > 0$
$1 \geq x \geq -2$ και $x > 0$



Π. ορισμού της g $A = [0, 1]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, 1]$ είναι
με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$

$f(2-x_1) > f(2-x_2)$. (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 - 2 < \ln x_2 - 2$. (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $f(2-x_1)+\ln x_1-2 < f(2-x_2)+\ln x_2-2$.

άρα $g(x_1) < g(x_2)$ άρα η $g \nearrow$ στο $(0,1]$

Άσκηση 11/ Αν για κάθε $x\in R$ είναι $f^3(x)+f(x)=x^3$
Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Λύση.

(Με άτοπο απαγωγή)
Έστω η f δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ ώστε $x_1<x_2$ και $f(x_1)\geq f(x_2)$. (1)
Τότε $f(x_1)\geq f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ (2)
(1)+(2) $\Rightarrow f^3(x_1)+f^3(x_1) \geq f^3(x_2)+f(x_2)$. $\Leftrightarrow$
$x_3 \geq x_2^3 \Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο.
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 12/ Έστω $f(x)=e^{2x}+3x-2$
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να λυθεί η ανίσωση $e^{2\ln^2 x} - e^{2\ln x} < 3(\ln x - \ln^2 x)$

Λύση.

α) Πεδίο ορισμού της f είναι $A=R$.
Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \Leftrightarrow e^{2x_1}<e^{2x_2}$ (1)
$x_1<x_2 \Leftrightarrow 3x_1<3x_2 \Leftrightarrow 3x_1-2<3x_2-2$ (2)
Από (1),(2) έχω: $e^{2x_1}+3x_1-2<e^{2x_2}+3x_2-2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \nearrow$

β) Η ανίσωση γίνεται
$e^{2\ln^2 x}+3\ln^2 x < e^{2\ln x}+3\ln x \Leftrightarrow$
$e^{2\ln^2 x}+3\ln^2 x-2 < e^{2\ln x}+3\ln x-2 \Leftrightarrow f(\ln^2 x)<f(\ln x)$
και αφού η $f \nearrow$ τότε $\ln^2 x<\ln x \Leftrightarrow \ln^2 x-\ln x<0$
$\ln x(\ln x-1)<0 \Leftrightarrow x\in(1,e)$

x	0		1		e	
$\ln x$		−	0	+		+
$\ln x-1$		−		−	0	+
		+	0	−	0	+

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1 Να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων.
α) $f(x) = 2x^5 + e^x - 2$. β) $g(x) = \frac{4}{1-x}$

Άσκηση 2 Αν η f είναι ↘ στο R να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων α) $g(x) = 2f^3(x) + 5x - 3$
β) $h(x) = f(4-x) - x^3 + 2$.

Άσκηση 3 Αν η f είναι ↗ και η g είναι ↘ στο R.
Να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων
α) $h(x) = (f\circ g)(x) - (g\circ g)(x)$.
β) $\phi(x) = f(2x-4) + g(2-x)$

Άσκηση 4 Αν η f έχει Π. ορισμού το $A = [1, 10]$ και είναι γνησίως αύξουσα και
$g(x) = f(2x-4) + \sqrt{x-4}$
i) Να βρεθεί το Π. ορισμού της g.
ii) Να δείξετε ότι η g είναι ↗.

Άσκηση 5 Αν η f έχει Π.ορ το R και είναι γνησίως μονότονη στο R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,2)$
α) Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.
β) Να λυθούν οι ανισώσεις: i) $f(x^2-2x) > f(x-2)$
ii) $f(\ln^2 x) < f(\ln x)$
iii) $f(2x-6) > 3$
iv) $(f\circ f)(2x-4) < 2$

Άσκηση 6 Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο R και ισχύει $f^2(2) + f^2(3) - 2(f(2) - f(3)) + 2 = 0$
i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
ii) Να λυθεί η ανίσωση $(f\circ f)(4-2x) < f(f(2))$

Άσκηση 7/ Αν $f(x) = e^{2-x} - 2x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λυθεί η ανίσωση.

$$e^{2-\ln^2 x} - e^{2-\ln x} < 2(\ln^2 x - \ln x)$$

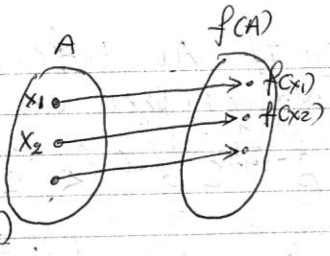
Άσκηση 8/ Να λυθεί η ανίσωση.

$$e^{x^2} - \ln(3x-2) < e^{3x-2} - \ln(x^2)$$

Άσκηση 9/ Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει η $g \nearrow$ και $(g \circ f)(x) + 3f(x) = 2x - 6$. Να δείξετε ότι η $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. (με άτοπο)

ΜΑΘΗΜΑ 13.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1



Μια συνάρτηση $f: A \to f(A)$ λέγεται ένα προς ένα όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$

- Για να δείξω ότι μια συνάρτηση είναι 1-1, αρκεί να δείξω:

α) αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

β) Η f είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία το πολύ σε ένα σημείο.

- Για να δείξω ότι μια συνάρτηση δεν είναι 1-1

α) Με δοκιμή βρίσκω δύο τιμές $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$

β) αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$ ή $x_1 = g(x_2)$

- Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.
- Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 και με δοκιμή βρω ότι έχει μια ρίζα τότε αυτή είναι μοναδική
- $\boxed{\text{Αν } f(A) = f(B) \xrightarrow{f\ (1-1)} A = B}$ ισχύει μόνο αν 1-1
- $\boxed{\text{Αν } A = B \text{ τότε } f(A) = f(B)}$ ισχύει πάντα

Το αντίστροφο ισχύει μόνο όταν η f είναι 1-1

1-1. ΠΡΟΣΗΜΟ ΓΝΗΣ. ΜΟΝΟΤΟΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Αν η $f \nearrow$ ~~στο Π. ορισμού~~ σε ένα διάστημα Δ και $f(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι μοναδική ρίζα. άρα

x		x_0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Αν η $f \searrow$ στο Π. ορισμού της και $f(x_0) = 0$ τότε το x_0 μοναδική ρίζα άρα

x		x_0	
$f(x)$	$+$	0	$-$

Άσκηση 1/ $f(x)=\frac{2^x}{2^x-4}$, $g(x)=e^x+4x-2$

Να δείξετε ότι είναι 1-1.

Λύση

i) Για την f έχω π. ορ: $A=\mathbb{R}-\{2\}$.

Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2^{x_1}}{2^{x_1}-4}=\frac{2^{x_2}}{2^{x_2}-4} \Leftrightarrow$

$2^{x_1}\cdot 2^{x_2}-4\cdot 2^{x_1}=2^{x_1 x_2}-4\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow -4\cdot 2^{x_1}=-4\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow 2^{x_1}=2^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$

άρα η f είναι 1-1.

ii) Για την g έχω π. ορ: $B=\mathbb{R}$.

Έστω $x_1<x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

και $x_1<x_2 \Leftrightarrow 4x_1<4x_2 \Leftrightarrow 4x_1-2<4x_2-2$ (2)

Άρα (1)+(2) $\Rightarrow e^{x_1}+4x_1-2<e^{x_2}+4x_2-2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

άρα η g ↗ άρα και 1-1

Άσκηση 2/ $f(x)=|2x-4|-2$ Να δείξετε ότι δεν είναι 1-1.

Λύση.

1ος τρόπος/

Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow |2x_1-4|-2=|2x_2-4|-2$

$\Leftrightarrow |2x_1-4|=|2x_2-4| \Leftrightarrow$

$2x_1-4=2x_2-4$ ή $2x_1-4=-(2x_2-4)$

$2x_1=2x_2$ $\quad$ $2x_1-4=-2x_2+4$

$x_1=x_2$ $\quad$ $2x_1=-2x_2+8$

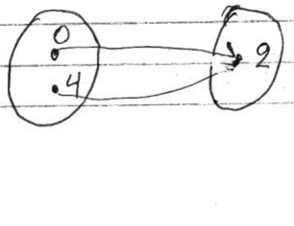
$x_1=-x_2+4$

Άρα δεν είναι πάντα $x_1=x_2$ άρα δεν είναι 1-1.

2ος τρόπος/ Με δοκιμή βρίσκω.

$f(0)=2$ και $f(4)=2$ άρα

$0\neq 4$ και $f(0)=f(4)$ άρα η f δεν είναι 1-1.



Άσκηση 3/ Αν $|f(1)-2|+f^2(2)-4f(2)=-4$
Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

Λύση.

$|f(1)-2|+f^2(2)-4f(2)+4=0 \Leftrightarrow$

$|f(1)-2|+(f(2)-2)^2=0 \Leftrightarrow f(1)-2=0$ και $f(2)-2=0$

$\Leftrightarrow f(1)=2$ και $f(2)=2$. άρα

$1\neq 2$ και $f(1)=f(2)$ άρα η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 4/ Αν $(f\circ f)(x)=3x+5-4e^{f(x)}$
για κάθε $x\in R$ τότε να δείξετε ότι
η f είναι 1-1. Λύση.

Η ισότητα γράφεται $f(f(x))+4e^{f(x)}=3x+5$

Έστω $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))$
δηλαδή $(f\circ f)(x_1)=(f\circ f)(x_2)$ (1)

και $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)} \Leftrightarrow 4e^{f(x_1)}=4e^{f(x_2)}$ (2)

από (1)+(2) έχω $(f\circ f)(x_1)+4e^{f(x_1)}=(f\circ f)(x_2)+4e^{f(x_2)}$

οπότε $3x_1+5=3x_2+5 \Leftrightarrow$
$3x_1=3x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα
η f είναι 1-1.

Άσκηση 5/ Αν $f(x)=3x+e^x+5$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Να λυθεί η εξίσωση
$3\ln x-e^{\ln^3 x}=3\ln^3 x-e^{\ln x}$, $x>0$

Λύση

i) Έστω $x_1<x_2 \Leftrightarrow 3x_1<3x_2 \Leftrightarrow 3x_1+5<3x_2+5$ (1)
$x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow 3x_1+e^{x_1}+5<3x_2+e^{x_2}+5 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Αρα η f είναι $\nearrow$ άρα και 1-1.

(c) Η ισότητα γράφεται.

$$3\ln x + e^{\ln x} + 5 = 3\ln^3 x + e^{\ln^3 x} + 5$$ ή

$f(\ln x) = f(\ln^3 x)$ και αφού η f είναι 1-1

τότε $\ln x = \ln^3 x \Leftrightarrow \ln^3 x - \ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\ln x(\ln^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0.$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ή $\ln x = 1$ ή $\ln x = -1$.

$x = 1$ ή $x = e$ ή $x = e^{-1}$

<u>Άσκηση 6</u> Να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt{\ln x + 2} - \sqrt{\ln^2 x + 2} = 4(\ln^2 x - \ln x),\ x > e^{-2}$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται

$$\sqrt{\ln x + 2} + 4\ln x = \sqrt{\ln^2 x + 2} + 4\ln^2 x$$

ή $f(\ln x) = f(\ln^2 x)$ αν θέσω.

$f(x) = \sqrt{x+2} + 4x$.

όμως η f έχει π.ορ. $A = [-2, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 αφού

αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$ (1)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 4x_1 < 4x_2$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \sqrt{x_1+2} + 4x_1 < \sqrt{x_2+2} + 4x_2$ άρα η $f \nearrow$

άρα και 1-1.

Οπότε αφού $f(\ln x) = f(\ln^2 x)$ και η f (1-1),

τότε $\ln x = \ln^2 x \Leftrightarrow$

$\ln x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ή $\ln x = 1$

$x = 1$ ή $x = e$. δεκτές

Άσκηση 7/ Να λυθεί η εξίσωση.

$$e^x + 2007x = 1$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $e^x+2007x-1=0$ ή ισοδύναμα $f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=e^x+2007x-1$.

Όμως η f είναι ↗ (εύκολο) άρα και 1-1 και αφού $f(0)=0$ η f έχει μοναδική ρίζα το 0

Άσκηση 8/ Να λυθεί η εξίσωση

$$3^x+4^x=5^x.$$

Λύση.

Παρατηρώ ότι $3^2+4^2=5^2$ (Πυθαγ. θεώρημα) άρα η εξίσωση έχει ρίζα το 2.

Είναι όμως μοναδική;

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται.

$$\frac{3^x}{5^x}+\frac{4^x}{5^x}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0$$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$ με $x\in R$.

Έστω $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}-1$

$f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f ↘ άρα και 1-1

και αφού $f(2)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 2

άρα και η αρχική εξίσωση έχει μοναδ. ρίζα το 2.

Άσκηση 9.) Αν fog είναι 1-1 τότε
α) Να δείξετε ότι και η g είναι 1-1
β) Να λυθεί η εξίσωση.
$$g(ημ2x) - g(ημx) = 0$$

Λύση.

α) Είναι $(fog)(x) = f(g(x))$

Έστω $g(x_1) = g(x_2)$ τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$
$\Leftrightarrow (fog)(x_1) = (fog)(x_2)$ και αφού η fog (1-1)
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η g είναι 1-1.

β) $g(ημ2x) = g(ημx) \xrightarrow{g\ (1-1)} ημ2x = ημx \Leftrightarrow$
$2ημx\,συνx - ημx = 0 \Leftrightarrow (2συνx - 1)ημx = 0 \Leftrightarrow$
$2συνx - 1 = 0$ ή $ημx = 0$
$συνx = 1/2$ ή $ημx = 0$
$συνx = συν\pi/3$ ή $ημx = ημ0$
$x = 2κ\pi \pm \pi/3$ ή $x = κ\pi$.

Άσκηση 10/Α) Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \ln x + x - 1$.

Λύση. Η f έχει π. ορισμού το $A = (0, +\infty)$
Η f είναι $\nearrow$ (εύκολο) και αφού $f(1) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 1 (άρα και 1-1) άρα

x	0		1	
$f(x)$		$-$	0	$+$

αφού $f(1) = 0$ και για $x < 1 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$
για $x > 1 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Β) Να λυθεί η ανίσωση $\ln x < 1 - x$.

Λύση Η ανίσωση γράφεται $\ln x < 1 - x \Leftrightarrow$
$\ln x + x - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$
αφού το A.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Άσκηση 1/ Να δείξετε ότι είναι 1-1 οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$, $g(x) = 4x^3 + \ln x - 2$

Άσκηση 2/ Να δείξετε ότι δεν είναι 1-1 οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)(x-2) + 2007$

$g(x) = |x-1| + 6$.

Άσκηση 3/ Αν $f^2(1) + f^2(2) - 2f(1) - 2f(2) = -2$

Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 4/ Αν $(f \circ f)(x) - e^x = 3 - e^{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

ii) Να λυθεί η εξίσωση.

$f(4^x) - f(3 \cdot 2^x - 2) = 0$.

Άσκηση 5/ Αν $f(x) = e^{1-x} - 5x + 3$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λυθεί η εξίσωση.

$e^{1-\eta\mu 2x} - e^{1-\sigma\upsilon\nu x} = 5(\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x)$

Άσκηση 6/ Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\ln x = 2007 - 2007x$.

ii) $2^x + 3^x = 5^x$

Άσκηση 7/ $f(x) = \frac{1}{e^x} - \ln x - \frac{1}{e}$

i) Να δείξετε ότι η $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$

ii) Να λυθεί η εξίσωση $e^{-x} = \ln x + e^{-1}$

iii) Να λυθεί η ανίσωση $e^{-x} < \ln x + e^{-1}$

Άσκηση 8/ Να λυθεί η ανίσωση.

$\ln(x-1) < 4 - 2x$