ΜΑΘΗΜΑ 23

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

α) Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 που ανήκει στο π. ορισμού της όταν και μόνο όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

β) Η f λέγεται συνεχής στο (α, β) όταν για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι συνεχής

γ) Η f λέγεται συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ όταν είναι συνεχής στο (α, β) και επιπλέον $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$, $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

δ) Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε όλο το π. ορισμού της

ε) Όλες οι γνωστές μας συναρτήσεις (που δεν είναι δίκλαδες) είναι συνεχείς στο π. ορισμού τους.

στ) Οι πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις.

ζ) οι δίκλαδες πρέπει να εξετάζονται ως προς τη συνέχεια στο σημείο αλλαγής

Λυμένες ασκήσεις

1) $f(x) = \eta\mu 5x + \ln(x-2)$ Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

Λύση.

Π. ορ. της f είναι $A = (2, +\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Αφού $\eta\mu 5x$, $\ln x$, $x-2$ είναι συνεχείς συναρτήσεις

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x} + 3 & \text{αν } x \neq 0 \\ 5 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Να εξετάσετε τη f ως προς τη συνέχεια.

Λύση

Για $x \neq 0$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 5$ και

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x} + 3\right) = \lim_{x \to 0}\left(2\frac{\eta\mu 2x}{2x} + 3\right) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

Αφού $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής και στο 0

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\text{συν}x + 5x}{x} & \text{αν } x<0 \\ 4x^2+2 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής.

Λύση

Για $x<0$ η f συνεχής ως πράξεις συνεχ. συναρτήσεων
Για $x>0$ η f συνεχής ως πολυωνυμική
Για $x=0$ είναι $f(0)=2$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(4x^2+2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\text{συν}x+5x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\text{συν}x}{x}+5\right) = 0+5=5$$

Αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$

άρα η f δεν είναι συνεχής στο 0.
άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$.

4)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\,\text{ημ}x + x^2}{x} & \text{αν } x>0 \\ 4 & \text{αν } x=0 \\ 2x^2+\beta-1 & \text{αν } x<0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των α, β για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για $x>0$ η f συνεχής ως πράξ. συνεχών συναρτήσεων
Για $x<0$ η f συνεχής ως πολυωνυμική
Πρέπει να είναι συνεχής και στο 0.

- $f(0)=4$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(2x^2+\beta-1) = \beta-1$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\alpha\,\text{ημ}x+x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\alpha\dfrac{\text{ημ}x}{x}+x\right) = \alpha$

Πρέπει $\beta-1=4$ και $\alpha=4 \Leftrightarrow \beta=5, \alpha=4$.

5)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-1} & \text{αν } x<1 \\ 2x^2+9 & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.

Λύση.

- $f(1)=4$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$.

Πρέπει και $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-1} = 4$

είναι $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ και $\lim_{x\to 1}(\alpha x^2+\beta x+3) = \alpha+\beta+3$.

Για να είναι το όριο πραγματικός αριθμός πρέπει

$\alpha+\beta+3=0 \Leftrightarrow \beta=-\alpha-3$.

τότε έχω $\lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2+(-\alpha-3)x+3}{x-1} = 4 \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2-\alpha x-3x+3}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x(x-1)-3(x-1)}{x-1} = 4 \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(\alpha x-3)}{(x-1)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(\alpha x-3)=4 \Leftrightarrow \alpha-3=4 \Leftrightarrow \alpha=7$.

οπότε $\beta=-7-3=-10$.

Για $\alpha=7$ και $\beta=-10$ πράγματι είναι

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{7x^2-10x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(7x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(7x-3)=4$$

άρα για $\alpha=7$ και $\beta=-10$ η f είναι συνεχής στο 1.

6) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(x-2)f(x) = x^2-5x+6$. Να υπολογ.

α) $f(2)$ β) το τύπο της f.

Λύση

α) Για $x\neq 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-2} = x-3$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x-3) = -1$

και αφού η f είναι συνεχής στο 2. Θα είναι.

$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = -1$.

β) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{αν } x\neq 2 \\ -1 & \text{αν } x=2 \end{cases} = x-3,\ \forall x\in\mathbb{R}$

αφού για $x=2$ αληθεύει ο τύπος.

(7) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x f(x) = ημ5x + 2x^2$.
Να υπολογ. α) $f(0)$ β) τον τύπο της f.

Λύση.

α) Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{ημ5x}{x} + 2x$.
$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(5\frac{ημ5x}{5x} + 2x\right) = 5\cdot 1 + 0 = 5$.

και αφού η f είναι συνεχής στο 0 τοτε.
$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 5$.

β) $f(x) = \begin{cases} \frac{ημ5x}{x} + 2x & αν\ x \neq 0 \\ 5 & αν\ x = 0 \end{cases}$

(8) Αν $ημ3x - x^2 \leq x f(x) \leq ημ3x + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ να βρεθεί το $f(0)$.

Λύση

• Για $x > 0$ είναι $\frac{ημ3x}{x} - x \leq f(x) \leq \frac{ημ3x}{x} + x$.
και $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημ3x}{x} - x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(3\frac{ημ3x}{3x} - x\right) = 3\cdot 1 - 0 = 3$.
$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ημ3x}{x} + x\right) = 3\cdot 1 + 0 = 3$.

άρα $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$. (1)

• Για $x < 0$ είναι $\frac{ημ3x}{x} - x \geq f(x) \geq \frac{ημ3x}{x} + x$
$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ημ3x}{x} - x\right) = 3$
άρα $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$. (2)
$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ημ3x}{x} + x\right) = 3$

Από (1), (2) έχω $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$
και αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0
τοτε $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 3$

(9) Αν η f συνεχής στο R και $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2+2x+3}{x^2-1}=4$.
να υπολογ. το $f(1)$

Λύση

Αφού η f συνεχής στο R άρα και στο 1 τότε $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$
άρα αρκεί να υπολογίσω το $\lim_{x\to 1}f(x)$

Έστω $g(x)=\frac{f(x)-x^2+2x+3}{x^2-1}$, $x\neq\pm 1$ τότε $\lim_{x\to 1}g(x)=4$

και $f(x)=(x^2-1)\cdot g(x)+x^2-2x-3$. άρα

$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}[(x^2-1)g(x)+x^2-2x-3]=$

$=\lim_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\lim_{x\to 1}g(x)+\lim_{x\to 1}(x^2-2x-3)=0\cdot 4+(-4)=-4$

άρα και $f(1)=-4$.

(10)* Αν $f^3(x)+f(x)=ημx$ $\forall x\in R$. και

α) Να δείξετε $f(0)=0$

β) Να δείξετε $|f(x)|\leq|ημx|$.

γ) Να δείξετε ότι η f συνεχής στο 0.

Λύση

α) Για $x=0$ είναι $f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0)+1)=0 \Leftrightarrow$
$f(0)=0$ ή $f^2(0)+1=0$ αδύνατο άρα $f(0)=0$.

β) $f^3(x)+f(x)=ημx \Leftrightarrow f(x)\cdot(f^2(x)+1)=ημx \Leftrightarrow$
$f(x)=\frac{ημx}{f^2(x)+1}$ αφού $f^2(x)+1\neq 0$ $\forall x\in R$.

άρα $|f(x)|=\left|\frac{ημx}{f^2(x)+1}\right|=\frac{|ημx|}{|f^2(x)+1|}\leq\frac{|ημx|}{1}=|ημx|$

αφού $|f^2(x)+1|\geq 1$ $\forall x\in R$.

γ) αφού $|f(x)|\leq|ημx| \Leftrightarrow -|ημx|\leq f(x)\leq|ημx|$

είναι $\lim_{x\to 0}(-|ημx|)=0$ και $\lim_{x\to 0}(|ημx|)=0$

άρα και $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

και αφού $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ η f συνεχής στο 0.

Ασκήσεις

① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 5x + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 5 & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$ Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής $\forall\, x \in R$.

② $f(x) = \begin{cases} \alpha\,\eta\mu\frac{\pi}{2}x + e^{x-1} + 2 & \alpha\nu\ x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x-1} & \alpha\nu\ x > 1 \end{cases}$ Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο R.

③ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \beta x + \gamma}{x - 1} & \alpha\nu\ x < 1 \\ 2x^2 + 2 & \alpha\nu\ x \geq 1 \end{cases}$ Να βρεθούν οι τιμές των β, γ ώστε η f να είναι συνεχής στο 1

④ Αν $\eta\mu^2 x - 4x^4 \leq x^2 f(x) \leq \eta\mu^2 x + 4x^4 \quad \forall x \in R$.
και η f συνεχής στο R να υπολογίσεις το $f(0)$

⑤ Αν $\eta\mu 5x - 2x^2 \leq x f(x) \leq \eta\mu 5x + 2x^2 \quad \forall x \in R$.
και η f συνεχής στο R να υπολογίσεις το $f(0)$

⑥ Αν $(x-2) f(x) = x^3 - 8 \quad \forall x \in R$ και η f συνεχής στο R να βρεθεί i) $f(2)$ ii) ο τύπος της f $\forall x \in R$.

⑦ Αν η f συνεχής στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει
$$x \cdot f(x) = \eta\mu 2x + x^2 + 3x.$$
Να βρεθεί i) $f(0)$ ii) ο τύπος της f για κάθε $x \in R$.

⑧ Αν $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 4x^2 + 5}{x - 2} = 6$ και η f συνεχής στο R.
Να βρεθεί το $f(2)$.

⑨ Αν $\lim\limits_{x \to 0} \left[2008 + x^{2008} \cdot \eta\mu\frac{1}{x} - f(x)\right] = 2008$
και η f συνεχής στο 0 να βρεθεί το $f(0)$

⑩ Αν η f συνεχής στο R και διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ να υπολογίσεις
$$\lim_{x \to 2} \frac{f^2(x) - 4f(x) + 3}{f^2(x) - 1}$$